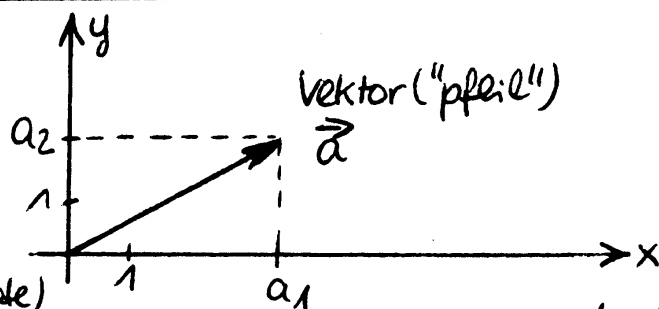
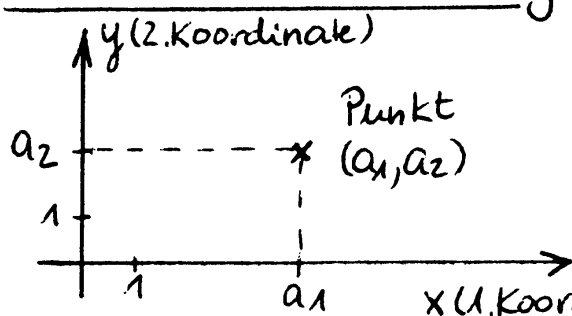


1. Lineare Algebra.

1.1. Vektoren in der Ebene: Übersicht

1. Veranschaulichung von Vektoren in der Ebene:



$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

Auch üblich: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ← geordnetes Paar

2. Menge aller Vektoren in der Ebene:

heißt \mathbb{R}^2 ; dabei ist \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen.

$$\text{Also: } \mathbb{R}^2 = \{ \vec{a} = (a_1, a_2) \mid a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

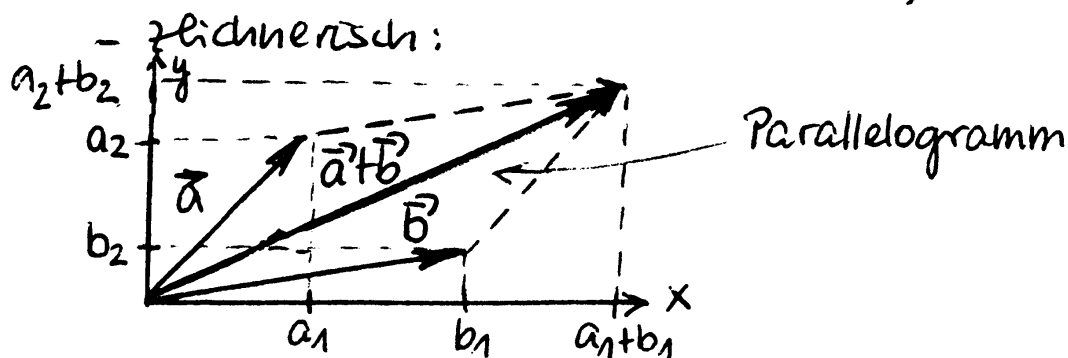
3. Addition von Vektoren in der Ebene:

- liefert wieder einen Vektor

- rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

- zeichnerisch:



- Rechenregeln: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

4. Nullvektor in der Ebene:

$$\vec{0} = (0, 0)$$

- Rechenregel: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

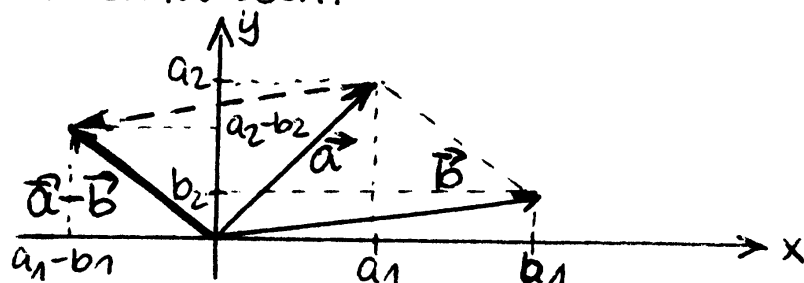
5. Subtraktion von Vektoren in der Ebene:

- liefert wieder einen Vektor

- rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

- zeichnerisch:



- Rechenregel: $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

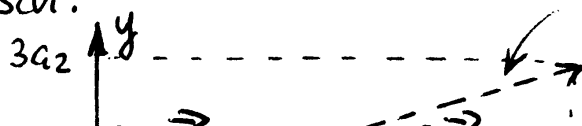
6. Multiplikation von einem Vektor in der Ebene mit einem Skalar (d.h. mit einer Zahl):

- liefert wieder einen Vektor

- rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$$

- zeichnerisch:



$k > 0$: Strecken/Stauchen
um Faktor k
($k \cdot a_1, k \cdot a_2$)

- Rechenregeln : $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}' = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}')$; $1 \cdot \vec{a}' = \vec{a}'$;
 $k \cdot (\vec{a}' + \vec{b}') = k \cdot \vec{a}' + k \cdot \vec{b}'$;
 $(k_1 + k_2) \cdot \vec{a}' = k_1 \cdot \vec{a}' + k_2 \cdot \vec{a}'$
- Zusammenhang mit der Subtraktion:
 $\vec{a}' - \vec{b}' = \vec{a}' + (-1) \cdot \vec{b}'$

7. "Kanonische" Basisvektoren in der Ebene:

$$\vec{e}_1 = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1)$$

- Darstellung von $\vec{a}' = (a_1, a_2)$: $\vec{a}' = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$

8. Lineare Abhängigkeit (Kolinearität):

\vec{a}' und \vec{b}' sind linear abhängig, falls gilt:

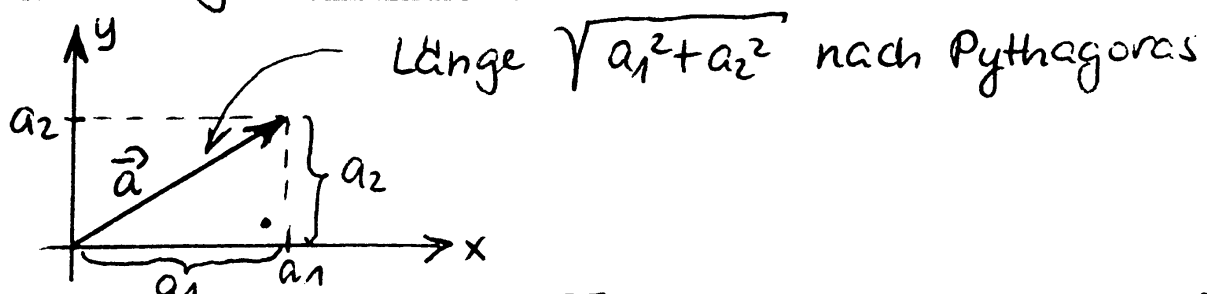
es gibt k_1 mit $\vec{a}' = k_1 \cdot \vec{b}'$ oder

es gibt k_2 mit $\vec{b}' = k_2 \cdot \vec{a}'$

- Anschauung für $\vec{a}' = (a_1, a_2)$, $\vec{b}' = (b_1, b_2)$:
 die Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) liegen auf
 einer Geraden durch den Nullpunkt

- Gegenteil: lineare Unabhängigkeit

9. Länge (Norm) eines Vektors in der Ebene:



- $|\vec{a}'| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Auch üblich: $\|\vec{a}'\|$
- ist auch Abstand der Punkte $(0, 0)$
 und (a_1, a_2)

- Rechenregeln: $|\vec{a}|=0$ gilt nur für $\vec{a}=\vec{0}$;
 $|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$; $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$
- für $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ ist $|\vec{a}-\vec{b}|$ der Abstand der Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) .

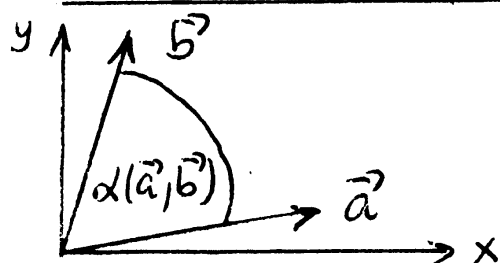
10. Einheitsvektoren:

- sind Vektoren der Länge 1

11. Skalarprodukt von zwei Vektoren in der Ebene:

- liefert einen Skalar
- Berechnung für $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$:
 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ Auch üblich: (\vec{a}, \vec{b}) , $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Rechenregeln: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$;
 $\langle \vec{a}+\vec{c}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle$;
 $\langle k \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = k \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$;
 $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$;
 $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

12. Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ in der Ebene:

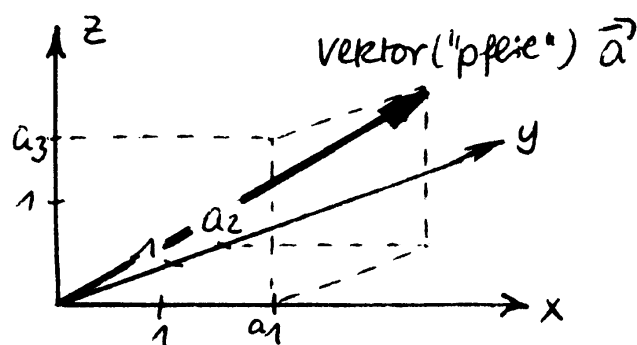
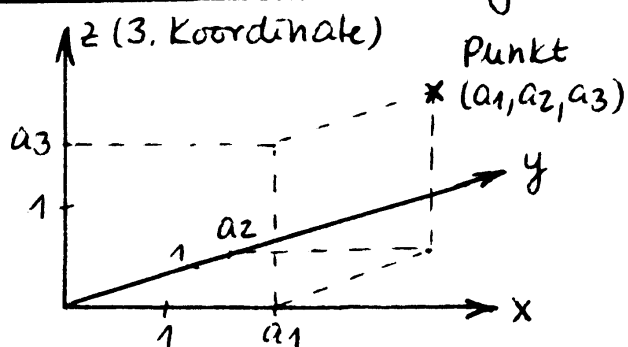


$$\cos(\alpha(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ wobei } 0 \leq \alpha(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$$

im Bogenmaß (d.h. $0^\circ \leq \alpha(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$ im Gradmaß)

1,2. Vektoren im Raum und n-dimensionale Vektoren: Übersicht

1. Veranschaulichung von Vektoren im Raum:



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Auch üblich: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ← Tripel

2. Menge aller Vektoren im Raum / Menge aller n-dimensionalen Vektoren:

heißt $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^n$; dabei ist n eine natürliche Zahl, kurz: $n \in \mathbb{N}$. Also:

$$\mathbb{R}^3 = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

\uparrow
n-Tupel

3. Addition von n-dimensionalen Vektoren:

- liefert wieder einen Vektor
- Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$
 $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
- Rechenregeln wie für $n=2$

4. n-dimensionaler Nullvektor:

$$\vec{0} = (0, \dots, 0)$$

- Rechenregel wie für $n=2$

5. Subtraktion von n-dimensionalen Vektoren:

- liefert wieder einen Vektor
- Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$
 $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$
- Rechenregel wie für $n=2$

6. Multiplikation von einem n-dimensionalen Vektor mit einem Skalar:

- liefert wieder einen Vektor
- Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $k \in \mathbb{R}$
 $k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, \dots, k \cdot a_n)$
- Rechenregeln und Zusammenhang mit der Subtraktion wie für $n=2$

7. "kanonische" n-dimensionale Basisvektoren:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots \vec{e}_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i. \text{ Koordinate}}}{1}, \dots, 0) \dots \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

- Darstellung von $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$:
 $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i$

8. Eine Linearkombination von m n-dimensionalen Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$

ist ein Ausdruck der Form

$$k_1 \vec{a}_1 + \dots + k_m \vec{a}_m = \sum_{j=1}^m k_j \vec{a}_j \quad \text{mit } k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$$

9. Lineare Abhängigkeit von n-dimensionalen Vektoren:

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ sind linear abhängig, falls sich einer der Vektoren als Linearkombination der restlichen darstellen läßt.

- Gegenteil: lineare Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit für drei Vektoren im Raum:

- anderer Name: Komplanarität
- Anschauung für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$:
 die Punkte (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2, c_3) liegen auf einer Ebene durch den Ursprung

10. Länge (Norm) eines n-dimensionalen Vektors:

- Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$
- Rechenregeln wie für $n=2$
- für $n=3$ ist $|\vec{a}|$ auch der Abstand der Punkte $(0,0,0)$ und (a_1, a_2, a_3)
- für $n=3$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ist $|\vec{a} - \vec{b}|$ auch der Abstand der Punkte (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3)

11. n-dimensionale Einheitsvektoren:

- sind Vektoren der Länge 1

12. Skalarprodukt von zwei n-dimensionalen Vektoren

- liefert einen Skalar
- Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$
- Rechenregeln wie für $n=2$

13. Öffnungswinkel zwischen zwei n-dimensionalen Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$:

- Berechnung: $\cos(\alpha(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$,
 wobei $0 \leq \alpha(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$ im Bogenmaß
 (d.h. $0^\circ \leq \alpha(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$ im Gradmaß),
 also wie für $n=2$

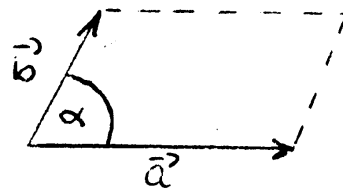
14. Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren im \mathbb{R}^3 :

- gibt es nur im \mathbb{R}^3
- liefert wieder einen Vektor
- Berechnung: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

↑ "Kreuz"
- anderer Name: Kreuzprodukt

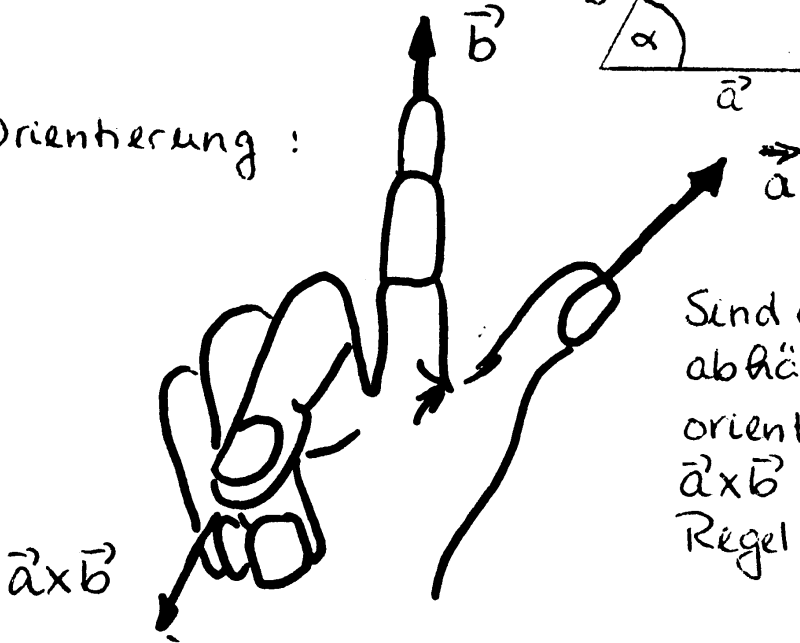
- Rechenregeln: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$,
 $\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$,
 (d.h. $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b})
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha(\vec{a}, \vec{b}))$ für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$;
 (d.h. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des
 von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelo-
 gramms



Vektoren im
Raum!

$$\alpha = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$$

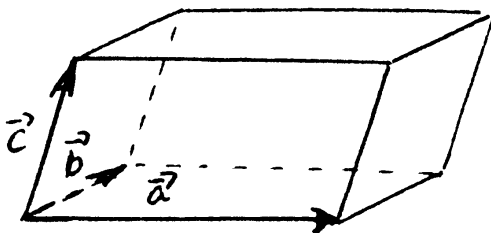
- Orientierung:



Sind \vec{a} und \vec{b} linear un-
abhängig, so ist $\vec{a} \times \vec{b}$ so
orientiert, daß \vec{a} , \vec{b} und
 $\vec{a} \times \vec{b}$ der "Rechte-Hand-
Regel" genügen.

15. Spatprodukt von drei Vektoren im \mathbb{R}^3 :

- gibt es nur im \mathbb{R}^3
- liefert einen Skalar
- Berechnung: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$
- für linear unabhängige Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist
 $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ das Volumen des von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c}
 aufgespannten Spats



1.3. Matrizenrechnung : Übersicht

1. Eine $m \times n$ -Matrix

Ist ein Schema A von $m \cdot n$ reellen Zahlen in folgender Anordnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{Zeile } i \\ \vdots \\ m \text{ Zeilen} \end{matrix}$$

\uparrow
 Spalte j
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ Spalten}}$

Kurzschreibweise: $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$

Noch kürzer: $A = (a_{ij})$

2. Menge aller $m \times n$ -Matrizen

heißt $M(m \times n, \mathbb{R})$, also:

$$M(m \times n, \mathbb{R}) = \{ A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \}$$

3. Ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ läßt sich als Matrix auffassen:

- Interpretation als Zeilenvektor: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in M(1 \times n, \mathbb{R})$
- Interpretation als Spaltenvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M(n \times 1, \mathbb{R})$

4. Addition von zwei $m \times n$ -Matrizen (also von Matrizen gleichen Formats):

- liefert wieder eine $m \times n$ -Matrix
- Berechnung: $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$
 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- Rechenregeln: $A + B = B + A, A + (B + C) = (A + B) + C$

5. Nullmatrix:

$O = (0)$ (genauer: $O = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j)

6. Subtraktion von zwei $m \times n$ -Matrizen:

- Liefert wieder eine $m \times n$ -Matrix
- Berechnung: $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$
 $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$
- Rechenregel: $A - A = O$

7. Multiplikation einer $m \times n$ -Matrix mit einem Skalar

- Liefert wieder eine $m \times n$ -Matrix
- Berechnung: $A = (a_{ij}), k \in \mathbb{R}$
 $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$
- Rechenregeln: $(k_1 \cdot k_2) \cdot A = k_1 \cdot (k_2 \cdot A); 1 \cdot A = A;$
 $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B;$
 $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$
- Zusammenhang mit der Subtraktion:
 $A - B = A + (-1) \cdot B$

8. Multiplikation von einer $r \times m$ -Matrix mit einer $m \times n$ -Matrix:

Spaltenzahl der 1. Matrix = Zeilenzahl der 2. Matrix

- Liefert eine $r \times n$ -Matrix
- Berechnung: $A = (a_{ik}), B = (b_{kj})$

$$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj} \right)$$

$$= (\underbrace{\langle a_{i1}, \dots, a_{im} \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{i. Zeile von A}}}, \underbrace{\langle b_{1j}, \dots, b_{mj} \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{j. Spalte von B,} \\ \text{als Zeile geschrieben}}})$$
- Merkregel: In Zeile i / Spalte j von $A \cdot B$ steht das Skalarprodukt der i . Zeile von A mit der j . Spalte von B

- Rechenregeln : $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
 - falls die Ausdrücke erklärt sind !
- Vorsicht :
 - falls $A \cdot B$ erklärt ist, muß $B \cdot A$ nicht erklärt sein.
 - falls $A \cdot B$ und $B \cdot A$ erklärt sind, können sie unterschiedliches Format haben.
 - falls $A \cdot B$ und $B \cdot A$ erklärt sind und gleiches Format haben, kann trotzdem $A \cdot B \neq B \cdot A$ sein.
 - aus $A \cdot B = 0$ folgt nicht immer : $A = 0$ oder $B = 0$.

9. $n \times n$ -Einheitsmatrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{genauer: } E_n = (a_{ij}) \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases})$$

- Rechenregeln: $A \cdot E_n = A$, $E_n \cdot B = B$
 - falls die Ausdrücke erklärt sind !

10. Eine invertierbare Matrix A

- muß eine $n \times n$ -Matrix (also "quadratisch") sein
- hat eine inverse Matrix A^{-1} mit der typischen Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$
- Rechenregeln : $(A^{-1})^{-1} = A$; $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
 - falls die Ausdrücke erklärt sind !
- Vorsicht :
 - es gibt $n \times n$ -Matrizen $\neq 0$, die nicht invertierbar sind !
- Hinweise :
 - Nr. 14 liefert ein Kriterium für die Invertierbarkeit
 - Nr. 15 liefert ein Schema zur Berechnung der inversen Matrix einer invertierbaren Matrix

11. Transponieren einer $m \times n$ -Matrix:

- liefert eine $n \times m$ -Matrix
- Berechnung: $A = (a_{ij})$
 $A^t = (a_{ji}^t)$ mit $a_{ji}^t = a_{ij}$

- Merkregel: Alle Zeilen als Spalten schreiben!
- Rechenregeln: $(A^t)^t = A$; $(A+B)^t = A^t + B^t$;
 $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$; $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
 - falls die Ausdrücke erklärt sind.

12. Elementare Zeilen (Spalten)umformungen einer Matrix:

- helfen
 - beim Lösen linearer Gleichungssysteme (siehe 1.4.)
 - bei der Berechnung der inversen Matrix (siehe 15.)
- es gibt drei Arten:
 - Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten)
 - Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einem Skalar $\neq 0$
 - Addition eines beliebigen Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte)
- jede $m \times n$ -Matrix A läßt sich durch elementare Umformungen auf folgende Normalform bringen:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} b_{m1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{rr} \end{array} & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \text{Zeile 1 bis } r \\ \\ \text{Zeile } r+1 \text{ bis } m \\ \text{(falls } r < m) \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Spalte 1 bis } r} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{Spalte} \\ r+1 \\ \text{bis } n \\ \text{(falls } r < n)}}$

Dabei ist $b_{m1} \neq 0, \dots, b_{rr} \neq 0$;

* bedeutet beliebige Einträge, 0 nur Eintrag 0.

13. Den Rang einer $m \times n$ -Matrix A

- bestimmt man, indem man A in die Normalform aus 12. umformt und die Zahl r abliest
- Bezeichnung: $r = \text{rg}(A)$

14. Invertierbare $n \times n$ -Matrizen:

- sind genau die $n \times n$ -Matrizen A mit $\text{rg}(A) = n$
- lassen sich durch elementare Zeilenumformungen in E_n überführen

15. Bestimmung von A^{-1} für invertierbares A :

- 1. Schritt:
Man schreibe A und E_n nebeneinander $(A \mid E_n)$
- 2. Schritt:
Man überführe diese $n \times 2n$ -Matrix durch elementare Zeilenumformungen in $(E_n \mid B)$
- 3. Schritt:
Dann ist $A^{-1} = B$.

1.4. Lineare Gleichungssysteme: Übersicht1. Ein lineares Gleichungssystem

aus m Gleichungen mit n Unbekannten (Unbestimmten, Lösungsvariablen) $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ist von der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

wobei $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

Ist $b_1 = \dots = b_m = 0$, so heißt das System homogen, sonst inhomogen.

2. Formulierung in Matrixsprache:

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = M(n \times 1, \mathbb{R})$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m = M(m \times 1, \mathbb{R})$, so läßt sich das System

aus 1. kurz so notieren:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems,

$(A, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M(m \times (n+1), \mathbb{R})$ die erweiterte Koeffizientenmatrix.

3. Die Lösungsmenge des Systems aus 1.

- heißt $\text{Lös}(A, \vec{b}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{b} \}$

- kann folgende Struktur haben:

- $\text{Lös}(A, \vec{b}) = \emptyset$ (leere Menge)

"das System hat keine Lösung"

- $\text{Lös}(A, \vec{b}) = \{ \vec{x}_0 \}$

"das System hat genau eine Lösung"

- $\text{Lös}(A, \vec{b}) = \{ \vec{x}_0 + \sum_{i=1}^d k_i \cdot \vec{v}_i \mid k_1, \dots, k_d \in \mathbb{R} \}$,

wobei \vec{x}_0 Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$ ($d \in \mathbb{N}$) linear unabhängige Lösungen von $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ sind.

"das System hat unendlich viele Lösungen"

4. Bestimmung der Anzahl der Lösungen des Systems aus 1. durch Rangbetrachtungen:

- ist $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A, \vec{b})$, so hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ keine Lösung

- ist $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, \vec{b}) = n$, so hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.

Ist $m = n$, so gilt dies für $\text{rg}(A) = n$.

- ist $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, \vec{b}) < n$, so hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ unendlich viele Lösungen.

Für die Zahl d aus 3. gilt dabei: $d = n - \text{rg}(A)$.

5. Strategie zur Lösung eines eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ nach Gauß

- 1. Schritt:

Durch elementare Zeilenumformungen wird (A, \vec{b})

in (U, g) umgewandelt, wobei $U = (u_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h. $u_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt, also

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt "automatisch" $\text{Lös}(A, \vec{b}) = \text{Lös}(U, \vec{g})$.

– 2. Schritt:

Die Komponenten der Lösung von $U \cdot \vec{x} = \vec{g}$ werden in der Reihenfolge x_n, \dots, x_1 bestimmt, was wegen der Dreiecksform von U vergleichsweise einfach ist.

1.5. Determinanten: Übersicht.

1. Die Determinante einer Matrix:

- ist nur für $n \times n$ -Matrizen, also für "quadratische" Matrizen, erklärt
- ist eine Zahl

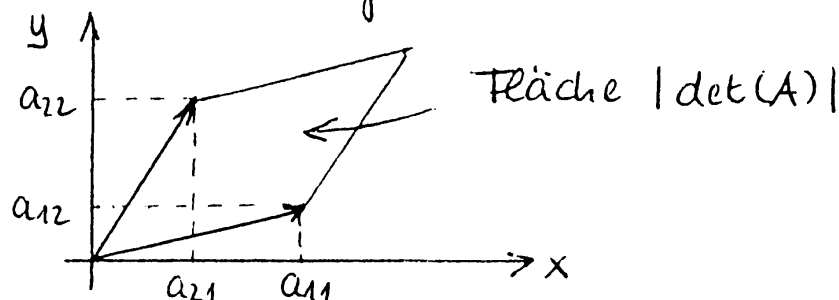
2. Determinanten von 2×2 -Matrizen:

- Berechnung: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Schema: $\begin{pmatrix} + & - \\ a_{11} & a_{12} \\ - & + \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

- Andere Bezeichnung: $|A|$
- Geometrische Interpretation: $|\det(A)|$ ist der Flächeninhalt des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Parallelogramms



3. Determinanten von 3×3 -Matrizen:

- Berechnung: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- Schema:

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} & \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{array}$$

Name: Sarrus-Regel

- Geometrische Interpretation: $\det(A)$ ist das Spatprodukt der drei Zeilenvektoren von A ; damit $|\det(A)|$ das Volumen des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Spats (vgl. auch 9.)

4. Determinanten von $n \times n$ -Matrizen ($n \geq 3$):

- berechnet man sukzessive durch Zurückführen auf Determinantenberechnung von Matrizen kleineren Formats
- durch Entwicklung nach der 1. Zeile: $A = (a_{ij})$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det(A_{1j}),$$

wobei $A_{1j} \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$ aus A durch Streichen von Zeile 1 und Spalte j entsteht

- Alternativen:

- Entwicklung nach der i . Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad \text{bzw.}$$

- Entwicklung nach der j . Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}),$$

wobei $A_{ij} \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$ aus A durch Streichen von Zeile i und Spalte j entsteht

- Merkrege: Es ist günstig, nach Zeilen bzw. Spalten mit vielen Nullen zu entwickeln.

5. Rechenregeln für Determinanten

$$\begin{aligned}
 - \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ x_1+y_1 & \dots & x_n+y_n \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ x_1 & \dots & x_n \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ y_1 & \dots & y_n \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\
 \\
 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ k \cdot x_1 & \dots & k \cdot x_n \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} &= k \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ x_1 & \dots & x_n \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Kurzformulierung: "det ist linear in jeder Zeile"

Insbesondere gilt $\det(B) = k \cdot \det(A)$, falls B aus A durch Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $k \neq 0$ entsteht.

- Entsteht B aus A durch Vertauschen von zwei Zeilen, so gilt $\det(B) = -\det(A)$,
- Entsteht B aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, so ist $\det(B) = \det(A)$,

Alle diese Rechenregeln gelten sinngemäß für Spalten.

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Name: Determinantenproduktsatz

- [Vorsicht!] "Meist" ist $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$!
- $\det(E_n) = 1$.

6. Invertierbare Matrizen

- sind genau die $n \times n$ -Matrizen A mit $\det(A) \neq 0$
- ist $\det(A) \neq 0$, so gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

– ist $\det(A) \neq 0$ und $B = (b_{ij})$ definiert durch

$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{i+j} \det(A_{ji}), \quad \boxed{\text{Vorsicht!}}$$

so ist $B = A^{-1}$. ↖ nicht A_{ij}

7. Lösung von linearen Gleichungssystemen

– das System $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$,
 $\vec{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$

– ist genau dann eindeutig lösbar, wenn
 $\det(A) \neq 0$ ist,

– hat dann die Lösung $\vec{x} = (x_j)$ mit

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & \downarrow & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} \quad \text{" } \vec{b} \text{ in Spalte } j \text{ "}$$

Name: Cramersche Regel,

8. Das Vektorprodukt

– von zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ist
als "formale Determinante"

$$\vec{a} \times \vec{b} = \text{"det"} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

durch Entwicklung nach der 1. Zeile zu berechnen.

9. Das Spatprodukt

– von drei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,
 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ist eine Determinante:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(vgl. auch 3.)

2. Zahlen

2.1. Reelle Zahlen: Übersicht

1. Grundrechenarten in \mathbb{R}

- sind die Addition (mit der "Umkehrung" Subtraktion) und die Multiplikation (mit der "Umkehrung" Division)
- Grundlegende Rechenregeln (Axiome):

$a+b = b+a;$ $(a+b)+c = a+(b+c);$ $a+0 = a;$ $x = -a$ ist die eindeutige Lösung von $x+a=0;$	$a \cdot b = b \cdot a;$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$ $a \cdot 1 = a;$ $x = \frac{1}{a}$ ist für $\boxed{a \neq 0}$ die eindeutige Lösung von $x \cdot a = 1;$
---	---
- Einige Folgerungen daraus:

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c;$ $a+b = a+c \Rightarrow b=c$ $x = b-a$ ist die eindeutige Lösung von $x+a=b$	$a \cdot b = a \cdot c$ und $\boxed{a \neq 0} \Rightarrow b=c;$ $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$ $x = \frac{b}{a}$ ist für $\boxed{a \neq 0}$ die eindeutige Lösung von $x \cdot a = b$
--	---

"folgt" \swarrow

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{für } \boxed{b, d \neq 0}$$

2. Ungleichungen in \mathbb{R}

- sind Ausdrücke, in denen $\leq, <, \geq, >$ vorkommt
- Rechenregeln:

$a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a=b;$ $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c;$ $a < b$ und $b \leq c \Rightarrow a < c;$ $a \leq b$ und $b < c \Rightarrow a < c;$ $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c;$ $a < b \Rightarrow a+c < b+c;$ $a \leq b$ und $\boxed{c \geq 0} \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ $a < b$ und $\boxed{c > 0} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ $a \leq b$ und $\boxed{c \leq 0} \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$ $a < b$ und $\boxed{c < 0} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: auto;">Vorsicht!</div>
---	--

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b < 0) \\ a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ und } b < 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b > 0) \end{array} \right\} \text{"Vorzeichen-} \\ \text{regeln"}$$

3. Intervalltypen

Es gibt folgende Intervalltypen (dabei sind $a, b \in \mathbb{R}, a < b$):

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

"abgeschlossen"

$$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

"offen"

$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

"halboffen"

$$[a, \infty[= [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$]a, \infty[= (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$]-\infty, a[= (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

"offen"

4. Beschränkte Mengen, obere und untere Schranken

- $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls es $L, K \in \mathbb{R}$ gibt mit $L < K$ und $M \subseteq [L, K]$

↑ "Teilmenge"

- L ist dann eine untere, K eine obere Schranke von M

5. Infimum, Supremum, Minimum, Maximum

Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, $M \neq \emptyset$, so hat M

- eine größte untere Schranke, das Infimum von M .

Bezeichnung: $\inf(M)$

- eine kleinste obere Schranke, das Supremum von M .

Bezeichnung: $\sup(M)$

Gilt $\inf(M) \in M$, so ist $\inf(M)$ auch das Minimum von M . Sonst hat M kein Minimum.

Bezeichnung: $\min(M)$

Gilt $\sup(M) \in M$, so ist $\sup(M)$ auch das Maximum von M . Sonst hat M kein Maximum.

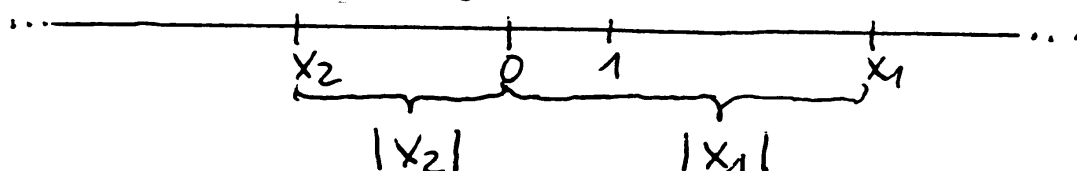
Bezeichnung: $\max(M)$.

6. Der Betrag in \mathbb{R}

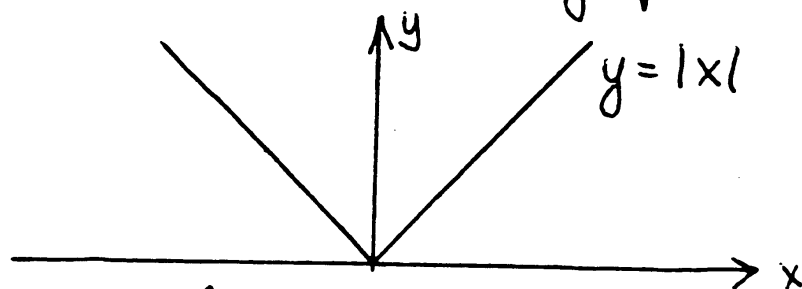
- wird für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x|$ bezeichnet
- ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

- Veranschaulichungen:
 - auf der Zahlengeraden:



- $|x|$ ist der Abstand von x vom Nullpunkt
- durch den Funktionsgraphen:



- Rechenregeln:
 - $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, falls $y \neq 0$;
 - $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Name: Dreiecksungleichung);
 - $|x-y| \geq |x| - |y|$

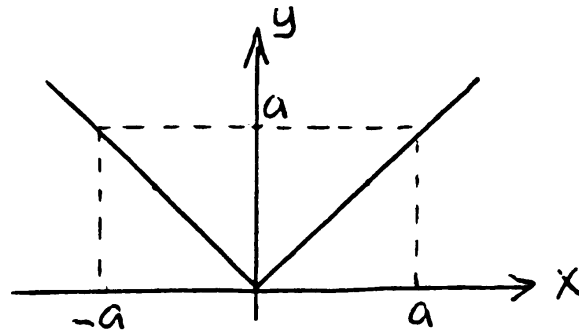
↑ Vorsicht! Nicht „=“

7. Betragsgleichungen

- löst man durch Fallunterscheidungen anhand der Definition des Betrags
- kann man in einfachen Fällen auch unter Ausnutzung des folgenden Resultats lösen:

Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gilt:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ oder } x = -a$$



8. Betragsgleichungen

- löst man auch durch Fallunterscheidungen anhand der Definition des Betrags
- kann man in einfachen Fällen auch unter Ausnutzung der folgenden Resultate lösen:
Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gilt:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in]-a, a[$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ oder } x \geq a$$

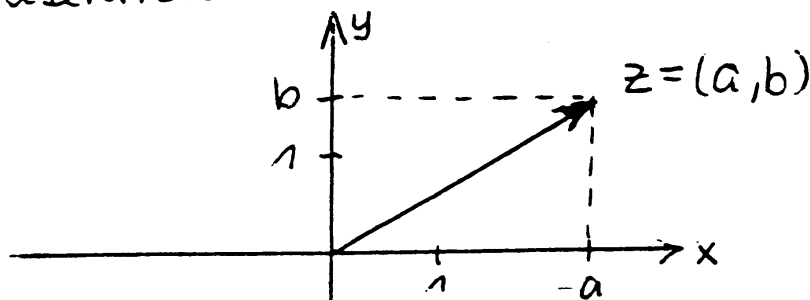
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$$

↑
"Vereinigung"

2.2. Komplexe Zahlen: Übersicht

1. Die Menge der komplexen Zahlen

- ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$
- besteht also aus den Punkten der Ebene, die man sich auch durch Vektoren oder "Zeiger" repräsentiert denken kann



2. Die Addition komplexer Zahlen

- ist die Vektoraddition: $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$
 $z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$
- Regeln und Veranschaulichungen aus 1.1.3. - 1.1.5. gelten sinngemäß

3. Die Multiplikation komplexer Zahlen (vgl. auch 7)

- ist für $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ gegeben durch
 $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc)$,

4. Die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen

- sieht man auf dem Bild unter 1. auf der x-Achse, die dann reelle Achse heißt und mit $\operatorname{Re} z$ beschriftet wird
- statt $(a, 0)$ schreibt man kurz a

5. Die rein-imaginären Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen

- sieht man auf dem Bild unter 1. auf der y-Achse, die dann imaginäre Achse heißt und mit $\operatorname{Im} z$ beschriftet wird.
- die imaginäre Einheit ist $i = (0, 1)$
 (in der Elektrotechnik: j statt i)
- Rechenregeln: $i^2 = -1$;
 $(0, b) = b \cdot i$.

6. Die Darstellung komplexer Zahlen durch Real- und Imaginärteile

- wird durch $z = (a, b) = a + b \cdot i$ geliefert
- a ist der Realteil von z , $a = \operatorname{Re} z$
- b ist der Imaginärteil von z , $b = \operatorname{Im} z$

7. Die Multiplikation komplexer Zahlen (vgl. 3)

- ist für $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ nun gegeben durch

$$z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + (ad + bc) \cdot i$$
- Merkregel: Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ beachten!
- Rechenregeln: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$;
 $z_1 \cdot 1 = z_1$; $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

8. Der Kehrwert einer komplexen Zahl $z \neq 0$

- ist für $z = a+bi$: $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$
- Merkregel: $\frac{1}{a+bi}$ mit $a-bi$ erweitern und ausrechnen!

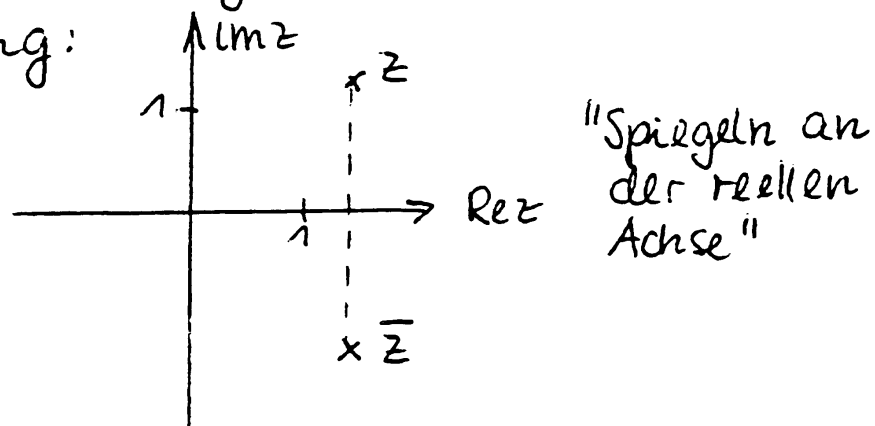
9. Der Quotient von zwei komplexen Zahlen

- ist für $z_1 = c+di$, $z_2 = a+bi \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{c \cdot a + d \cdot b}{a^2 + b^2} + \frac{da - cb}{a^2 + b^2} i$$
- Merkregel: $\frac{c+di}{a+bi}$ mit $a-bi$ erweitern und ausrechnen!

10. Die zu einer komplexen Zahl konjugiert komplexe Zahl

- ist für $z = a+bi$: $\bar{z} = a-bi$
- Andere Bezeichnung: z^*
- Anschauung:



- Rechenregeln: $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ für $z_2 \neq 0$
 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$;
 $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) = -\frac{1}{2} i (z - \bar{z})$

11. Der Betrag einer komplexen Zahl

- ist für $z = a + bi$ die Länge des Vektors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (vgl. 1.1.9.)
- Bezeichnung: $|z|$
- Regeln und Veranschaulichungen aus 1.1.9. gelten sinngemäß
- Weitere Rechenregeln: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ für $z_2 \neq 0$,
 $|\bar{z}| = |z|$;
 $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$; $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$
- Zusammenhang mit dem Konjugieren: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

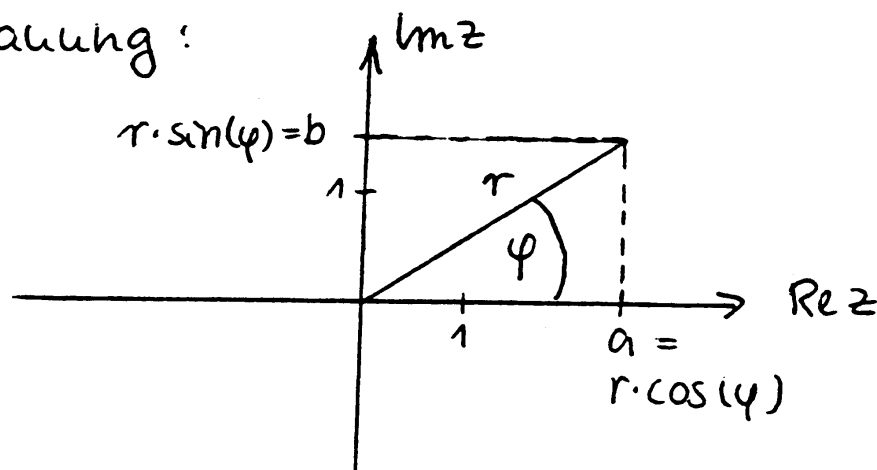
12. Beim Lösen von Betrags(un)gleichungen in \mathbb{C}

- werden bevorzugt der Zusammenhang mit dem Konjugieren und die Rechenregeln fürs Konjugieren verwendet.

13. Die Polarform

- existiert für jedes $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$
- Idee: Statt $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, in kartesischen Koordinaten durch den Realteil a und dem Imaginärteil b zu beschreiben, kann man z auch in POLARKOORDINATEN durch den ABSTAND r zum NULLPUNKT und den WINKEL φ MIT DER POSITIVEN REELLEN ACHSE im Bogenmaß beschreiben, wobei $-\pi < \varphi \leq \pi$ (manchmal auch $0 \leq \varphi < 2\pi$) vereinbart wird.

- Anschauung:



- Darstellung: $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ $\textcircled{*}$
mit $r > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$
- heißt Polarform oder trigonometrische Form von z
- r, φ : Polarkoordinaten von z
- r : Betrag von z
- φ : Winkel oder Argument von z
- Statt $\textcircled{*}$ schreibt man auch kurz: $z = r \cdot \exp(i\varphi)$
- Name: Exponentialform von z

14. Umrechnung: Polarkoordinaten \leftrightarrow Kartesische Koordinaten

1. " \rightarrow " Polarkoordinaten: r, φ
Kartesische Koordinaten: $a = r \cos(\varphi)$; $b = r \sin(\varphi)$
- " \leftarrow " Kartesische Koordinaten: a, b
Polarkoordinaten: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \dots \dots \dots \text{falls } a > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \dots \dots \dots \text{falls } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \dots \dots \dots \text{falls } a = 0, b < 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \dots \dots \dots \text{falls } a < 0, b \geq 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \dots \dots \dots \text{falls } a < 0, b < 0. \end{cases}$$

Vorsicht! Teilweise Änderung bei Vereinbarung $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Exkurs: sin, cos, arctan

φ	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
0	0	1
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\pi/2$	1	0

x	$\arctan(x)$
0	0
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pi/6$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) &= \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) &= -\sin(\varphi) \\ \sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi) \\ \cos(-\varphi) &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

15. Produktbildung in Polarkoordinaten

- $z_1 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$, $z_2 = r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:
 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Merksregel: Bei der Produktbildung werden
 - Beträge multipliziert
 - Winkel addiert
- Notation in Exponentialform:
 $(r_1 \cdot \exp(i\varphi_1)) \cdot (r_2 \exp(i\varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$

16. Kehrwertbildung in Polarkoordinaten

- $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:
 $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$
- Merksregel: Bei der Kehrwertbildung wird
 - der Kehrwert des Betrages gebildet
 - das Vorzeichen des Winkels geändert
- Notation in Exponentialform:
 $\frac{1}{r \cdot \exp(i\varphi)} = \frac{1}{r} \cdot \exp(-i\varphi)$

17. Potenzen und Polarkoordinaten

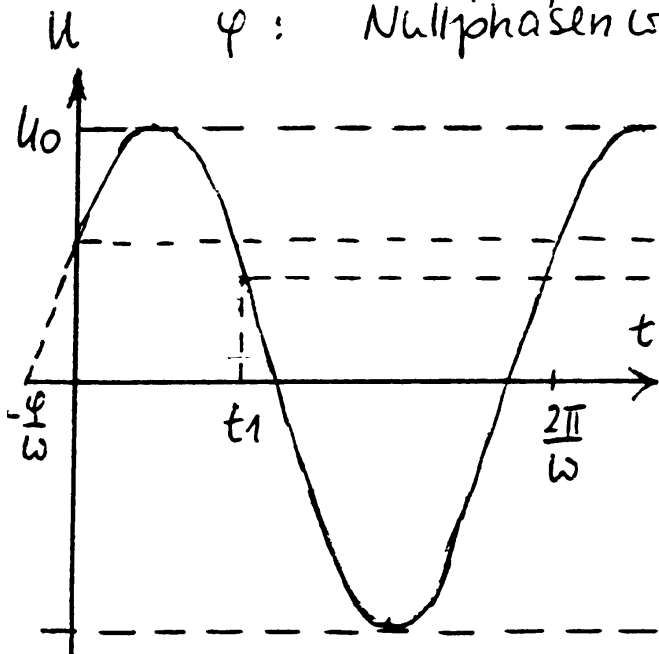
- $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$:
 $z^m = r^m \cdot (\cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi))$
- Merksregel: Bei der Bildung der m. Potenz wird
 - die m. Potenz des Betrages gebildet
 - der Winkel mit n multipliziert
- Notation in Exponentialform:
 $(r \cdot \exp(i\varphi))^m = r^m \cdot \exp(im\varphi)$
- Spezialfall: $(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$
 Name: Formel von Moivre

18. n. Wurzeln in Polarkoordinaten

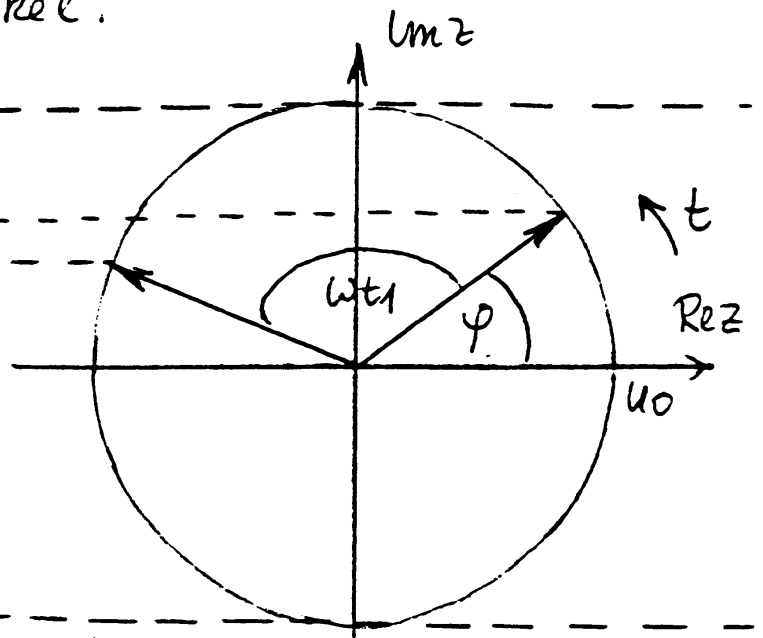
- $z^n = a$ hat für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ stets n Lösungen
- Ist $a = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$, so lauten diese:
 $z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right)$,
 $k = 0, \dots, n-1$
- Merksregel: Beim Bestimmen der n . Wurzeln
 - wird die n . Wurzel des Betrages gebildet
 - wird der Winkel zunächst durch n geteilt
 - weitere Winkel erhält man durch sukzessive Addition des durch n geteilten Vollkreises

19. Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik

- helfen bei der symbolischen Darstellung von Schwingungen im "Zeigerdiagramm"
- Beispiel: $u = u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
 u_0 : Schwingungsamplitude, $u_0 > 0$
 ω : Kreisfrequenz, $\omega > 0$
 φ : Nullphasenwinkel.



REELLE DARSTELLUNG
"Liniendiagramm"



KOMPLEXE DARSTELLUNG
"Polardiagramm"
"Zeigerdiagramm"

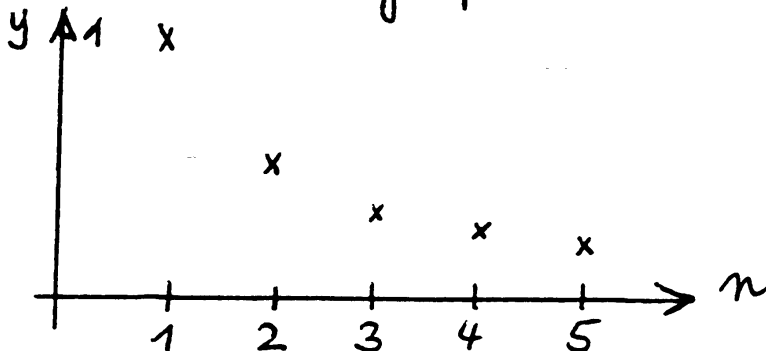
$$u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im} \left(\underbrace{u_0 \cdot \exp(j(\omega t + \varphi))}_{= \hat{u}(t)} \right)$$

3. Folgen, Reihen, Potenzreihen

3.1. Folgen: Übersicht

1. Eine reelle Folge

- ist mathematisch genau eine Funktion
 $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- statt $a(n)$ schreibt man üblicherweise a_n ,
 a_n ist das n . Folgenglied
- statt $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ schreibt man üblicherweise
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder noch kürzer (a_n)
↑ ↑ Klammern nicht vergessen! ↑ ↑
- Veranschaulichung:
 - durch den Graphen:

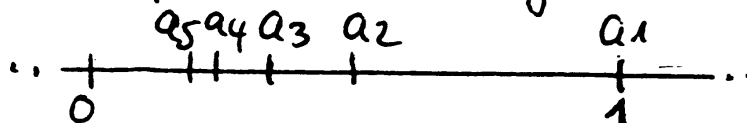


$$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right),$$

also

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

- auf der Zahlengeraden:



- Problem dabei: nur "Ausschnitte" erkennbar

2. Monotonie

Eine reelle Folge (a_n)

heißt...	falls für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$ gilt..
monoton wachsend	$a_n \leq a_{n+1}$
streng monoton wachsend	$a_n < a_{n+1}$
monoton fallend	$a_n \geq a_{n+1}$
streng monoton fallend	$a_n > a_{n+1}$

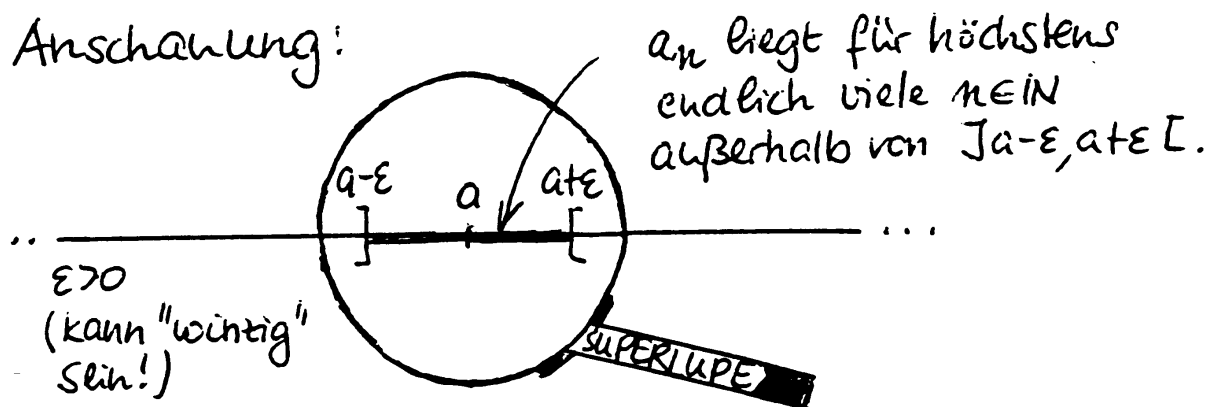
3. Beschränktheit

Eine reelle Folge (a_n) ist beschränkt, falls $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge von \mathbb{R} beschränkt ist. (vgl. 2.1.4.). Andernfalls ist (a_n) unbeschränkt.

4. Grenzwert, Konvergenz, Divergenz

- Eine Folge (a_n) hat den Grenzwert a , falls gilt:
zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$
für alle $n \geq N$.

- Anschauung:



- Schreibweise: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- Sprechweise: (a_n) konvergiert gegen a
- Eine Folge mit Grenzwert heißt konvergent, eine Folge ohne Grenzwert divergent.
- Hat eine Folge einen Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt.

5. Grenzwerte, die man mit Hilfe der Definition ermitteln kann:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ (c Konstante)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$ fest)

6. Beziehungen zwischen Konvergenz und Beschränktheit

- jede konvergente Folge ist beschränkt
- jede unbeschränkte Folge ist damit divergent

7. Häufungspunkte

- Eine Folge (a_n) hat den Häufungspunkt a , falls gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$
- Häufungspunkte sind anschaulich "Beimähe"-Grenzwerte
- Ist (a_n) konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so ist a der einzige Häufungspunkt von (a_n)
- Folgen mit zwei oder mehr Häufungspunkten sind damit divergent

8. Grenzwertsätze

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \dot{+} b_n) = a \dot{+} b; \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
 $b \neq 0 \Rightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, (b_n)$ beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

9. Grenzwertberechnung durch Vergleich mit bekannten Grenzwerten

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, |b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ (Einschachtelungssatz)

10. Grenzwerte, die man mit dem Einschachtelungssatz ermitteln kann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}, x > 0) ; \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

11. Ein Konvergenzkriterium, in dem der Grenzwert nicht vorkommt

Ist (a_n) eine monotone und beschränkte Folge, so ist (a_n) konvergent.

12. Die Zahl e.

$(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend und beschränkt. Der nach 11. existierende Grenzwert von (a_n) heißt e.
Kurz: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

13. Die Folge (x^n)

- ist für $|x| < 1$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$;
- ist für $x = 1$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$;
- ist für $x = -1$ divergent (2 Häufungspunkte!);
- ist für $|x| > 1$ divergent (da unbeschränkt!)

14. Eine komplexe Folge (z_n)

- ist durch die reellen Folgen $(a_n) = (\operatorname{Re} z_n)$ und $(b_n) = (\operatorname{Im} z_n)$ eindeutig beschrieben
- ist genau dann beschränkt, falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind
- ist genau dann konvergent, falls (a_n) und (b_n) konvergent sind.

In diesem Fall gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

3.2. Reihen: Übersicht

1. Eine Reihe

- entsteht grob gesprochen aus einer Folge durch Summation.
- Genau geht es so: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so sei $s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt dann die zur Summandenfolge (a_n) gehörige Reihe.

- Ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ die Summe der Reihe.

Bezeichnung: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

- Auch $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird oft mit dem Symbol $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ bezeichnet - unabhängig von der Konvergenz.

Vorsicht! "Rechnen" mit divergenten Reihen ist gefährlich!

2. Grundlegende Beispiele für Reihen

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ heißt harmonische Reihe. Sie ist divergent,

(Hintergrund: $s_{2n} \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot n \Rightarrow (s_n)$ unbeschränkt)

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ ist dagegen konvergent.

(Hintergrund: (s_n) ist monoton wachsend und $0 < s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$)

- geometrische Reihen sind von der Form

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} = 1 + x + x^2 + \dots \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

- für die n . Partialsumme $s_n = \sum_{i=1}^n x^{i-1}$ gilt:

$$s_n = \begin{cases} n & \text{falls } x=1 \\ \frac{1-x^n}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}$$

- $\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1}$ ist für $|x| < 1$ konvergent mit Summe $\frac{1}{1-x}$,
sonst divergent

3. Die Summandenfolge einer konvergenten Reihe ist eine Nullfolge

Formal: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 \uparrow Vorsicht! NICHT " \Leftarrow "!

Also: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent

(a_n) divergent $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent

4. Grenzwertsätze für Reihen

Sind $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergente Reihen mit Summe a bzw. b und ist $c \in \mathbb{R}$, so gelten:

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ ist konvergent mit Summe $a + b$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} (c \cdot a_i)$ ist konvergent mit Summe $c \cdot a$.

5. Vergleichskriterien

Sind $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

(1) Ist $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

(2) Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

6. Wurzelkriterium und Quotientenkriterium

Ist (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \geq 0$ [$a_n > 0$] für alle $n \in \mathbb{N}$ und existiert

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \left[s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right],$$

so gilt:

- (1) Ist $r < 1$ [$s < 1$], so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent;
- (2) Ist $r > 1$ [$s > 1$], so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent.

Vorsicht! Für $r=1$ [$s=1$] kann mit dem Wurzelkriterium [Quotientenkriterium] nicht entschieden werden, ob $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert oder nicht.

7. Alternierende Reihen

- sind von der Form $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, wobei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
- sind sicher konvergent, falls (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist (Leibniz-Kriterium)
- in diesem Fall gilt für $s = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$,
 $s_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i$: $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.

8. Absolute Konvergenz

- einer Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ liegt vor, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.
- in diesem Fall folgt die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und es gilt $|\sum_{i=1}^{\infty} a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Vorsicht! Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind.

9. Wurzelkriterium und Quotientenkriterium für absolute Konvergenz

Ist (a_n) eine Folge [mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$] und existiert

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad [s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|],$$

so gilt:

(1) Ist $r < 1$ [$s < 1$], so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent.

(2) Ist $r > 1$ [$s > 1$], so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent.

Vorsicht! Für $r=1$ [$s=1$] ist wie bei 6. keine Aussage möglich.

3.3. Potenzreihen und spezielle Funktionen - Übersicht.

1. Eine komplexe [reelle] Potenzreihe

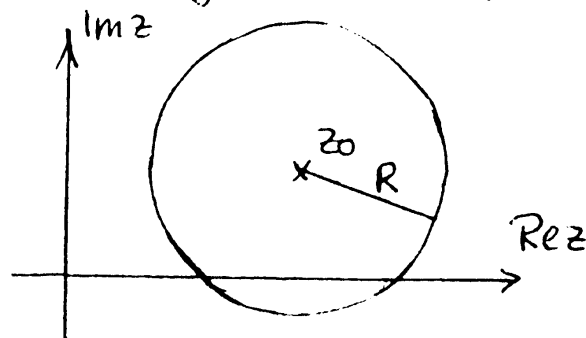
- ist eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ [$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$], wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine komplexe [reelle] Folge ist und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ [$x, x_0 \in \mathbb{R}$].
- z_0 [x_0] heißt Entwicklungspunkt
- oft ist z_0 [x_0] = 0, d.h. es werden Reihen der Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ [$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$] betrachtet
- soll durch die Vorschrift $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ [$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$] eine komplexe [reelle] Funktion definieren (vgl. 4). Dies geht nur für solche z [x], für die die Reihe konvergiert.

2. Konvergenzradius, Konvergenzkreis, Konvergenzintervall

Für eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ [$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$] ist stets genau eine der folgenden Aussagen richtig:

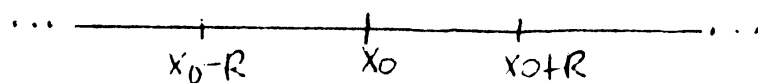
- ① Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ [$x \in \mathbb{R}$] absolut.
- ② Es gibt $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, so daß die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ [$x \in \mathbb{R}$] mit
- $|z - z_0| < R$ [$|x - x_0| < R$] absolut konvergiert
 - $|z - z_0| > R$ [$|x - x_0| > R$] divergiert

Anschauung im komplexen Fall:



- Konvergenz im Innern des Kreises
- Divergenz außerhalb des Kreises
- keine Aussage auf der Kreislinie

Anschauung im reellen Fall:



- Konvergenz in $]x_0 - R, x_0 + R[$
- Divergenz außerhalb von $[x_0 - R, x_0 + R]$
- keine Aussage in $x_0 - R, x_0 + R$

- ③ Die Reihe konvergiert nur für $z = z_0$ [$x = x_0$].

Im Fall ② ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe;
im Fall ① setzt man $R = \infty$, im Fall ③ $R = 0$.

Im Fall ② ist $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ [$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < R\}$
 $=]x_0 - R, x_0 + R[$] der Konvergenzkreis [das Konvergenzintervall];
im Fall ① setzt man $K_R = \mathbb{C}$ [\mathbb{R}].

3. Die Berechnung des Konvergenzradius nach Cauchy-Hadamard

Ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$ [$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$] eine komplexe [reelle]

Potenzreihe mit Konvergenzradius R , so gelten:

- Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt, so ist $R=0$.

- Existiert $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, so ist

- $R = \frac{1}{r}$, falls $r \neq 0$,

- $R = \infty$, falls $r = 0$.

Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so läßt sich $\sqrt[n]{|a_n|}$ auch durch $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ersetzen.

4. Durch Potenzreihen dargestellte Funktionen

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$ [$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$] sei eine komplexe [reelle]

Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \neq 0$ und Konvergenz-
kreis [Konvergenzintervall] K_R . Dann heißt

$f: K_R \rightarrow \mathbb{C}$ [\mathbb{R}] mit

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i \quad [\quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i]$$

die durch die obige Potenzreihe dargestellte Funktion.

Und die ist eigentlich von Interesse!

5. Die reelle Exponentialfunktion

- Ausgangspunkt: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$ hat den Konvergenzradius $R = \infty$

(dabei ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$; $0! = 1$;
Lesart "n Fakultät")

- Definition: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$
ist die reelle Exponentialfunktion

- Eigenschaften:

(1) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$

(2) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ (Funktionalgleichung)

(3) $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(4)(a) $\exp(x) > 1$ für $x > 0$

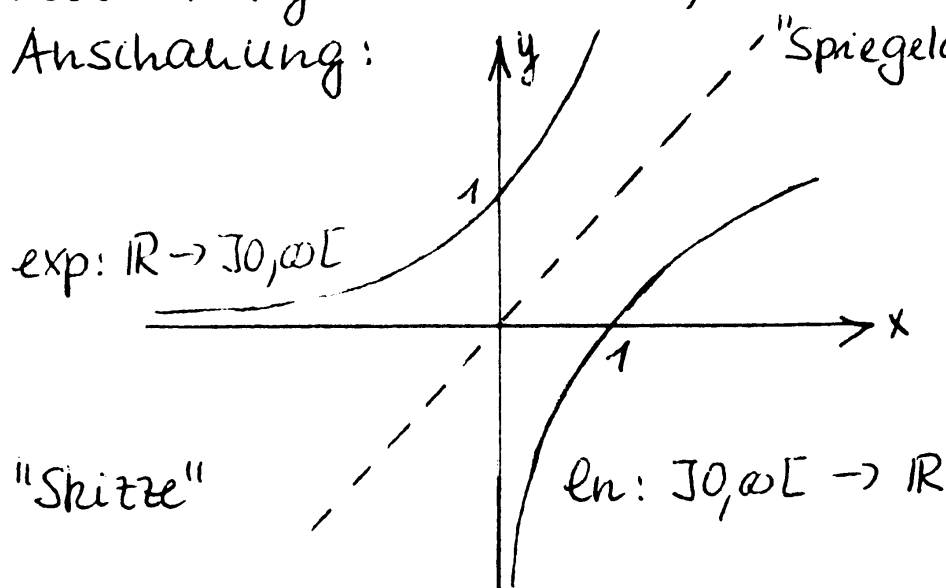
(b) $0 < \exp(x) < 1$ für $x < 0$

6. Der natürliche Logarithmus

- ist die Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$

- Bezeichnung: $\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

- Anschauung:



- "ln ist Umkehrfunktion von exp" drückt sich aus in den Gleichungen:

$\exp(\ln(x)) = x$ für alle $x \in]0, \infty[$

$\ln(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

- Eigenschaften:

(1) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

(2) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

(3) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

(4)(a) $\ln(x) > 0$ für $x > 1$

(b) $\ln(x) < 0$ für $0 < x < 1$

7. Potenzen zur Basis a

- sind für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}, a > 0$, definiert durch

$$a^x = \exp(\ln(a) \cdot x) \quad (*)$$
- andere Bezeichnung für a^x : $\exp_a(x)$
- $(*)$ ist nützlich beim Arbeiten mit dem Taschenrechner und beim Programmieren, da \exp und \ln meist vorhanden

8. Logarithmen zur Basis a

- sind für $x \in]0, \infty[$ und $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, definiert durch

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$
- auch diese Formel hilft beim Arbeiten mit dem Taschenrechner und beim Programmieren

9. Die komplexe Exponentialfunktion.

- Ausgangspunkt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ hat den Konvergenzradius
 $R = \infty$
- Definition: $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ ist die komplexe Exponentialfunktion

Eigenschaften:

- (1) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$; Spezialfall:
 $\exp(at+bi) = \exp(a) \cdot \exp(bi)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
- (2) $\exp(z) \neq 0$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- (3) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$
- (4) $|\exp(bi)| = 1$ für alle $b \in \mathbb{R}$

10. Sinus und Cosinus

- sind wie folgt definiert:

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \operatorname{Im} \exp(ix);$$

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \operatorname{Re} \exp(ix);$$

Damit gilt nach Definition die Eulerformel:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

(Nun ist die linke Seite nicht nur ein Symbol wie in 2.2.13., sondern ein Wert der komplexen Exponentialfunktion)

- Eigenschaften:

(1) Falls man $\frac{\pi}{2}$ als kleinste positive Nullstelle von \cos definiert, erhält man die Wertetabelle vom "Exkurs" auf S. (13).

(2) (a) $\sin(-x) = -\sin(x)$ "Sinus ist ungerade"
(b) $\cos(-x) = \cos(x)$ "Cosinus ist gerade"

(3) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(4) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
 $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

"Additionstheoreme"

(5) $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1};$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

"Reihendarstellungen"

11. Arcussinus und Arcuscosinus

- sind die Umkehrfunktionen von

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \quad \text{bzw.} \quad \cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1].$$

- Bezeichnungen:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{bzw.} \quad \arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

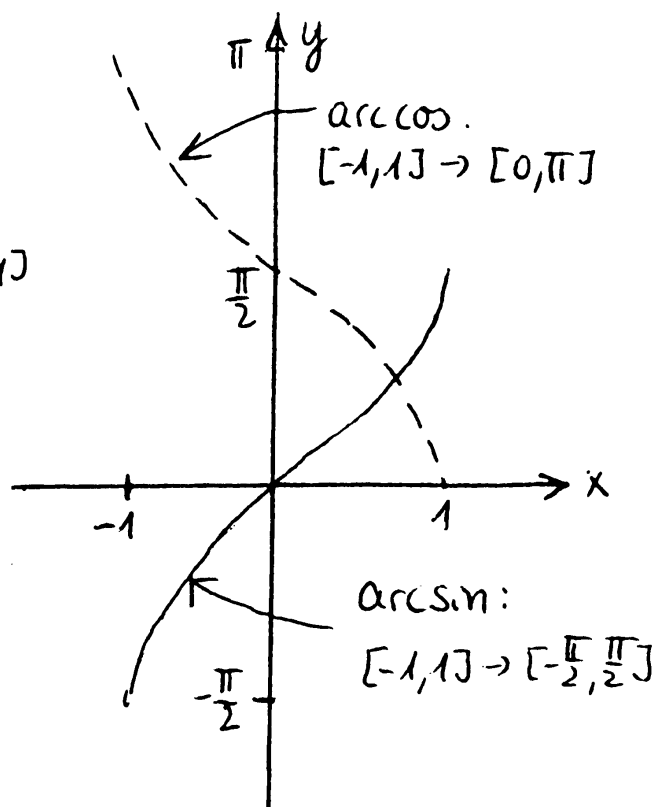
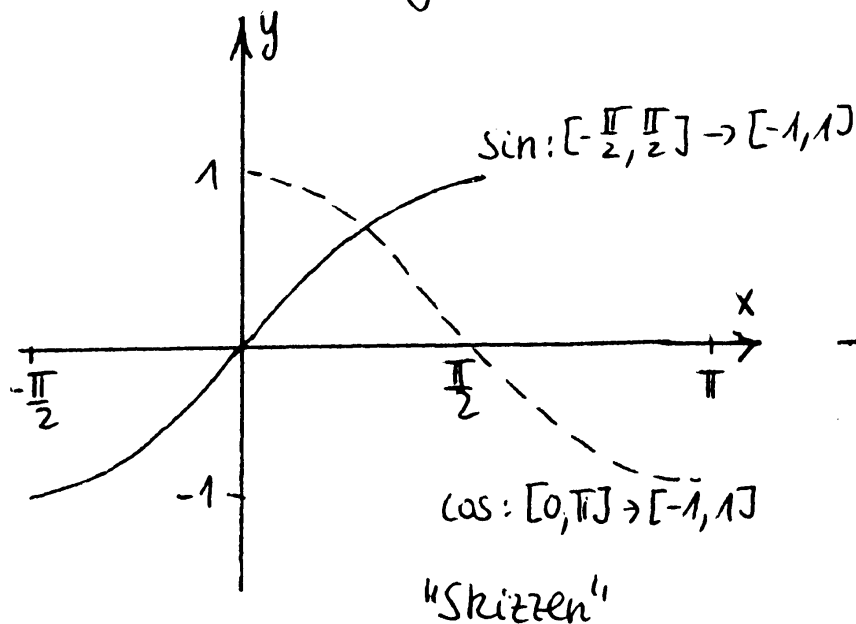
- Typische Gleichungen:

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \text{für } x \in [0, \pi];$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \quad \cos(\arccos(x)) = x \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

- Anschauung:



12. Tangens und Cotangens

- sind wie folgt definiert:

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

↑
Nullstellen von \cos aus
dem Definitionsbereich
entfernt!

$$\cot: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

↑
Nullstellen von \sin aus
dem Definitionsbereich entfernt!

13. Arcustangens und Arcuscotangens

- sind die Umkehrfunktionen von
 $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\cot:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$

- Bezeichnungen:

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ bzw. } \operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

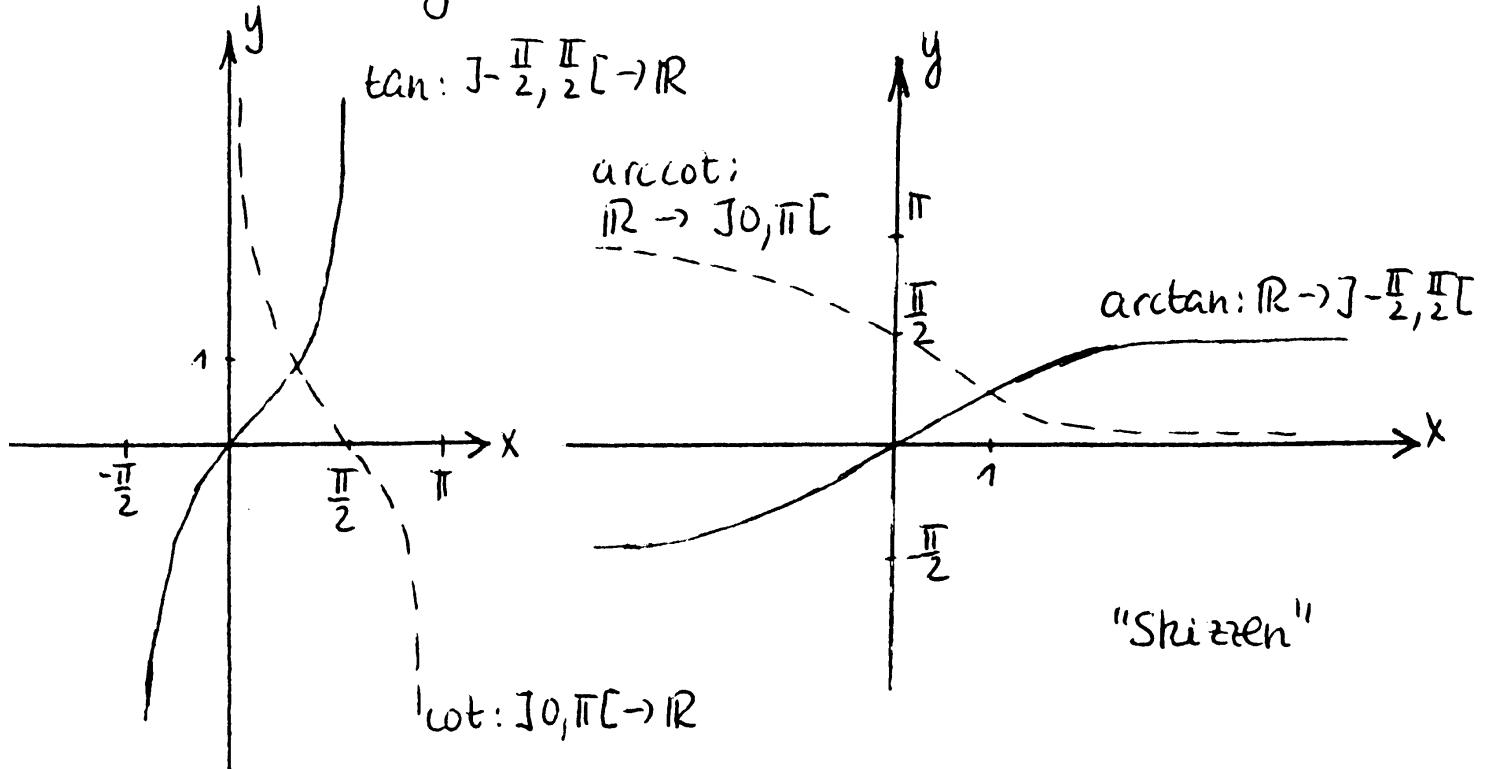
- Typische Gleichungen:

$$\arctan(\tan(x)) = x \quad \text{für } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[;$$

$$\operatorname{arccot}(\cot(x)) = x \quad \text{für } x \in]0, \pi[;$$

$$\tan(\arctan(x)) = x, \quad \cot(\operatorname{arccot}(x)) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

- Anschauung:



14. Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

- sind wie folgt definiert:

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

- Eigenschaften:

$$(1) \quad \sinh(0) = 0, \quad \cosh(0) = 1$$

$$(2) \quad \sinh \text{ ist ungerade, } \cosh \text{ ist gerade}$$

$$(3) \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$(4) \quad \sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

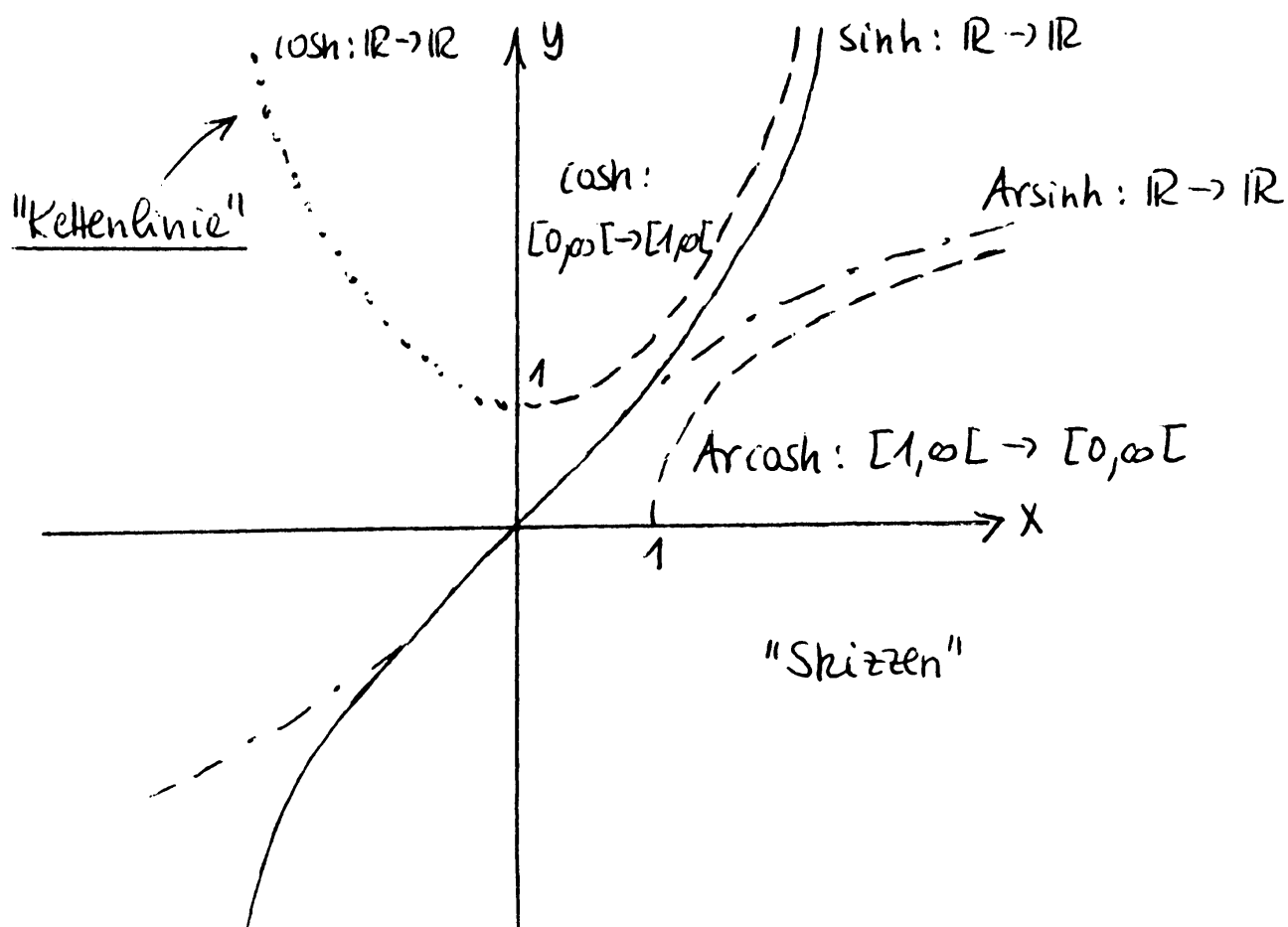
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

"Additionstheoreme"

$$(15) \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}; \quad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

"Reihendarstellungen"

- Anschauung; (auch zu 15.)



15. Area sinus hyperbolicus und Area cosinus hyperbolicus

- sind die Umkehrfunktionen von
 $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\cosh: [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$

- Bezeichnungen:

$\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\operatorname{arcosh}: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$

- Typische Gleichungen:

$$\operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{arcosh}(\cosh(x)) = x \quad \text{für } x \in [0, \infty[;$$

$$\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R};$$

$$\cosh(\operatorname{arcosh}(x)) = x \quad \text{für } x \in [1, \infty[.$$

4. Differentialrechnung in \mathbb{R}

4.1. Grenzwertbildung bei Funktionen und Stetigkeit: Übersicht.

1. Grenzwertbildung bei Funktionen

- Es ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$, falls für jede Folge (x_n) im Definitionsbereich von f mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt:

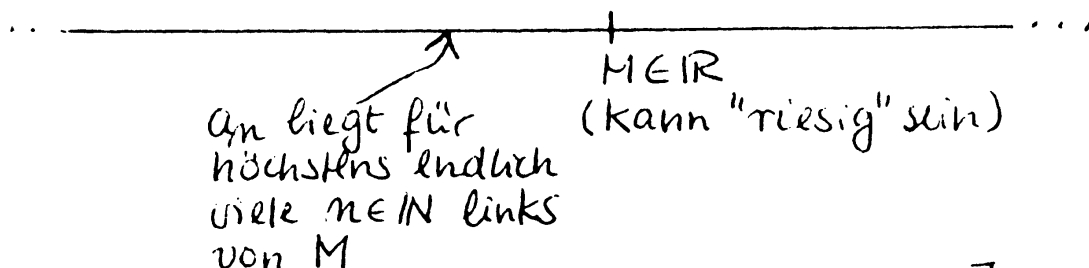
$(f(x_n))$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

- Diese Definition bleibt auch für $c = \pm \infty$ bzw. $x_0 = \pm \infty$ ("uneigentliche Grenzwerte") richtig, wenn man Konvergenz einer Folge (a_n) gegen $\pm \infty$ so definiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ [bzw. } -\infty] \Leftrightarrow$$

Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > M$ [bzw. $a_n < M$] für alle $n \geq N$.

Anschauung für $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$:



- Es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = c$ [bzw. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = c$],

falls für jede Folge (x_n) im Definitionsbereich von f mit $x_n < x_0$ [bzw. $x_n > x_0$] für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt:

$(f(x_n))$ ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

Name: Linksseitiger [bzw. rechtsseitiger] Grenzwert.

- Einige wichtige Grenzwerte bei speziellen Funktionen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty,$$

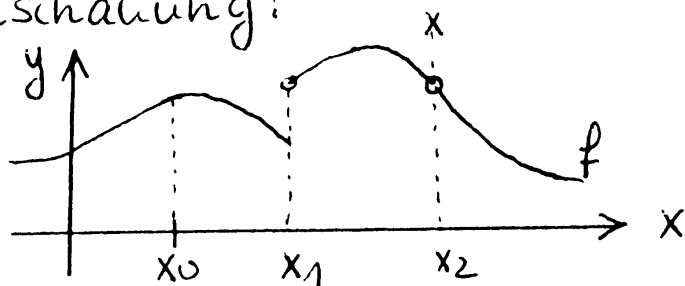
$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = \infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Stetigkeit.

- f heißt in einem Punkt x_0 im Definitionsbereich von f stetig, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

- Anschauung:



f ist in x_0 stetig, in x_1 und x_2 nicht.

- f ist genau dann in x_0 stetig, falls gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

- Merksatz: "Linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert = Funktionswert"

- f heißt stetig, falls f in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist

- Erste Beispiele stetiger Funktionen: $f(x) = c$ (Konstante), $f(x) = x$, $f(x) = |x|$.

3. Wie bekommt man aus stetigen Funktionen "neue"?

- f stetig in x_0 , $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot f$ stetig in x_0
- f, g stetig in $x_0 \Rightarrow f \pm g$ stetig in x_0
- f, g stetig in x_0 , $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in x_0
- f stetig in x_0 , g stetig in $f(x_0)$, $h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h$ stetig in x_0
- Hat eine stetige Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} , so ist auch diese stetig.
- Damit sind stetig:
 - Polynomfunktionen $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ (in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$!)
 - Gebrochen-rationale Funktionen, d.h. die Quotienten von Polynomfunktionen (in jedem x_0 des Definitionsbereichs!)
 - Wurzelfunktionen (in jedem x_0 des Definitionsbereichs!)

4. Potenzreihen liefern stetige Funktionen

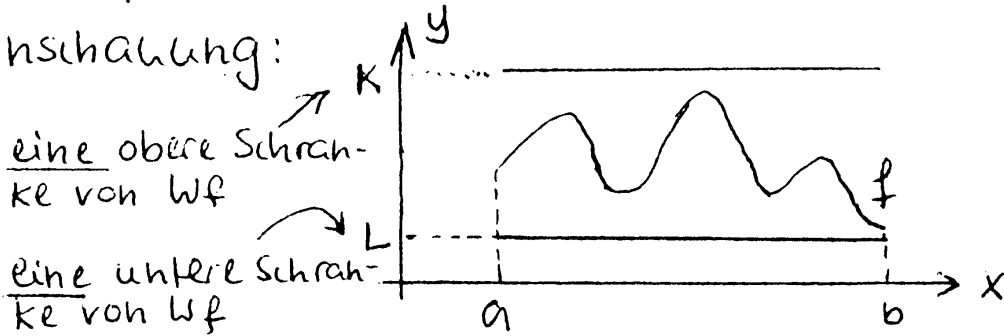
- Ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \neq 0$ und Konvergenzintervall K_R , so ist $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ in jedem $x_1 \in K_R$ stetig.
- Damit sind in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig: $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$.
- Mit 3. sind dann in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig: $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\ln(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\operatorname{arccot}(x)$, $\operatorname{Arsinh}(x)$, $\operatorname{Arcosh}(x)$, $\exp_a(x)$, $\log_a(x)$

5. Eigenschaften stetiger Funktionen, deren Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall ist

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

- Dann ist der Wertebereich W_f von f beschränkt;
Kurz: " f ist beschränkt",

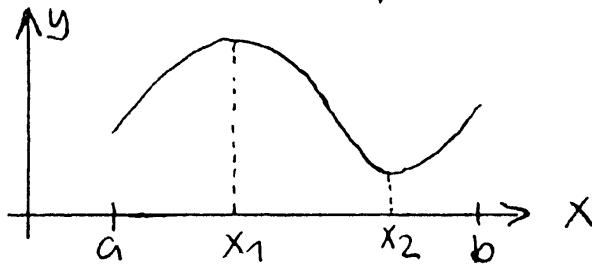
- Anschauung:



- Name: Satz von der Beschränktheit

- Dann gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = \max W_f$, $f(x_2) = \min W_f$.

- Anschauung:

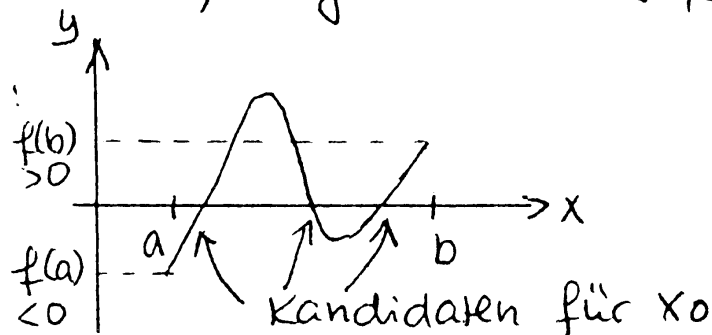


- Achtung: x_1, x_2 sind nicht immer eindeutig bestimmt!

- Name: Satz vom Maximum / Minimum

- Gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliches Vorzeichen), so gibt es $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = 0$.

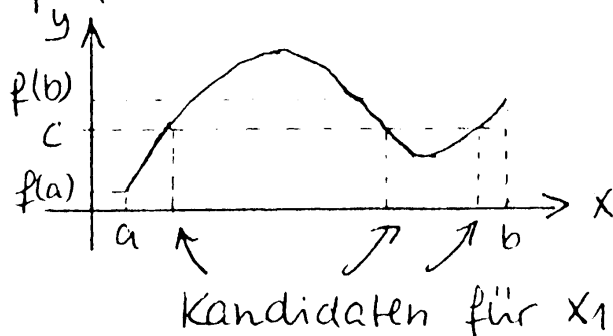
- Anschauung:



- Name: Nullstellensatz

- Zu jedem c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es $x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = c$.

- Anschauung:



- Name: Zwischenwertsatz.

4.2. Differenzierbare Funktionen und ihre Ableitungen: Übersicht.

1. Differenzierbarkeit und Ableitung in x_0

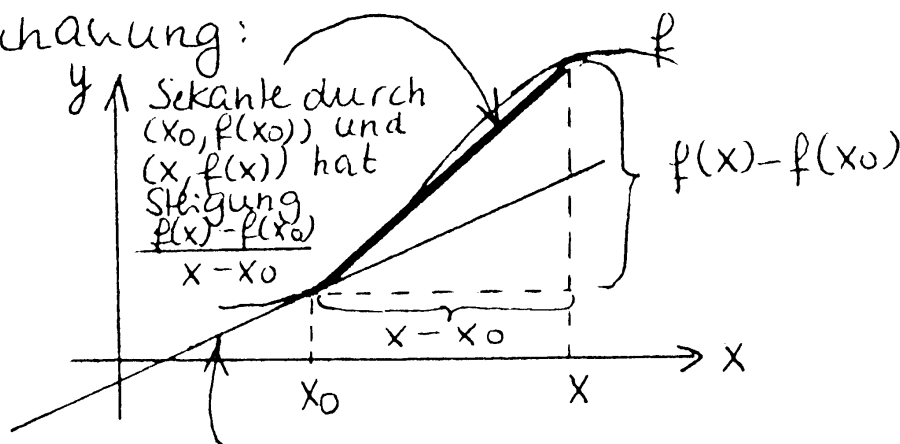
- f heißt in einem Punkt x_0 des Definitionsbereichs differenzierbar, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existiert.}$$

- Gegebenenfalls heißt dieser Limes Ableitung oder Steigung von f in x_0 .

- Bezeichnungen: $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

- Anschauung:



Tangente an den Graphen von f hat Steigung $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- falls es eine Tangente bzw. den obigen Limes gibt -

2. Die Tangente

- an den Graphen von f durch $(x_0, f(x_0))$ existiert also, falls f in x_0 differenzierbar ist,
- sie hat die Gleichung $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

3. Differenzierbarkeit

- f heißt differenzierbar, falls f in jedem Punkt x_0 des Definitionsbereich differenzierbar ist
- in diesem Fall ist die Ableitungsfunktion (oder kurz Ableitung) f' von f erklärt
- Erste Beispiele differenzierbarer Funktionen und ihrer Ableitungen:

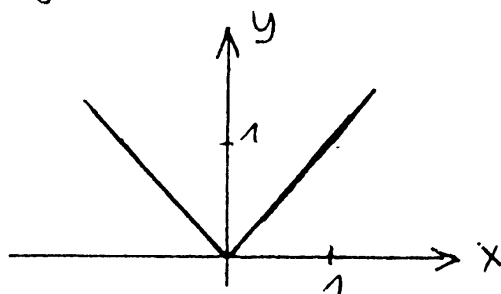
$$f(x) = c \text{ (Konstante)} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

4. Beziehungen zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

- ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig
- anders ausgedrückt: ist f in x_0 nicht stetig, so ist f in x_0 nicht differenzierbar
- es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind:
 - $f(x) = |x|$ ist stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar
 - Anschauung.



5. Einfache Ableitungsregeln

- f in x differenzierbar, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $c \cdot f$ in x differenzierbar mit $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.
 Name: Konstantenregel

- f, g in x differenzierbar \Rightarrow
 $f+g$ in x differenzierbar mit $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
 Name: Summenregel.
- f, g in x differenzierbar \Rightarrow
 $f \cdot g$ in x differenzierbar mit $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
 Name: Produktregel.
- f, g in x differenzierbar, $g(x) \neq 0 \Rightarrow$
 $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar mit $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
 Name: Quotientenregel.

6. Die Ableitung von Polynomfunktionen.

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \Rightarrow$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot i \cdot x^{i-1} = a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot x + \dots + a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

- Merksregel: Polynome werden summandenweise differenziert.

7. Die Ableitung von Potenzreihen.

- Situation: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ reelle Potenzreihe mit

Konvergenzradius $R \neq 0$ und Konvergenzintervall K_R

- $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$
 $\Rightarrow f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \cdot (x-x_0)^{i-1} = a_1 + a_2 \cdot 2(x-x_0) + a_3 \cdot 3(x-x_0)^2 + \dots$
- Merksregel: Potenzreihen werden summandenweise differenziert.

- Beispiele:
- $$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x) \Rightarrow f'(x) = \exp(x) \\ f(x) &= \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\ f(x) &= \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \\ f(x) &= \sinh(x) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x) \\ f(x) &= \cosh(x) \Rightarrow f'(x) = \sinh(x) \end{aligned}$$

Vorsicht! Kein „-“!

8. Die Ableitung der Umkehrfunktion.

- Hat eine differenzierbare Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} und gilt $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, so ist f^{-1} in x differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Beispiele: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in]0, \infty[$

! $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1, 1[$$

$$f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1, 1[$$

! $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{Arsinh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f(x) = \operatorname{Arcosh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x \in]1, \infty[$$

! bedeutet: besonders wichtig!

9. Die Kettenregel.

- Ist g in x differenzierbar, f in $g(x)$ differenzierbar und $h(x) = f(g(x))$, so ist h in x differenzierbar mit

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

\uparrow "äußere Ableitung" \uparrow "innere Ableitung"

10. Höhere Ableitungen

- entstehen aus f' durch weiteres Differenzieren, sofern die entsprechende Ableitung existiert

- Bezeichnungen:

$f'(x)$, $f^{(1)}(x)$	1. Ableitung
$f''(x)$, $f^{(2)}(x)$	2. Ableitung
$f'''(x)$, $f^{(3)}(x)$	3. Ableitung
\vdots	
$f^{(n)}(x)$	n . Ableitung

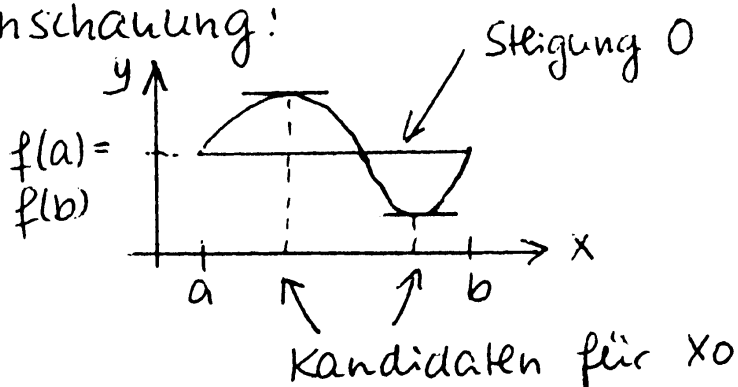
- Existiert $f^{(n)}$, so ist f n -mal differenzierbar
- Ist $f^{(n)}$ zusätzlich stetig, so ist f n -mal stetig differenzierbar
- Existiert $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f unendlich (beliebig) oft differenzierbar.

4.3. Mittelwertsätze und Anwendungen: Monotonie- untersuchungen, lokale Extrema und Regeln von l'Hôpital: Übersicht.

1. Die Mittelwertsätze

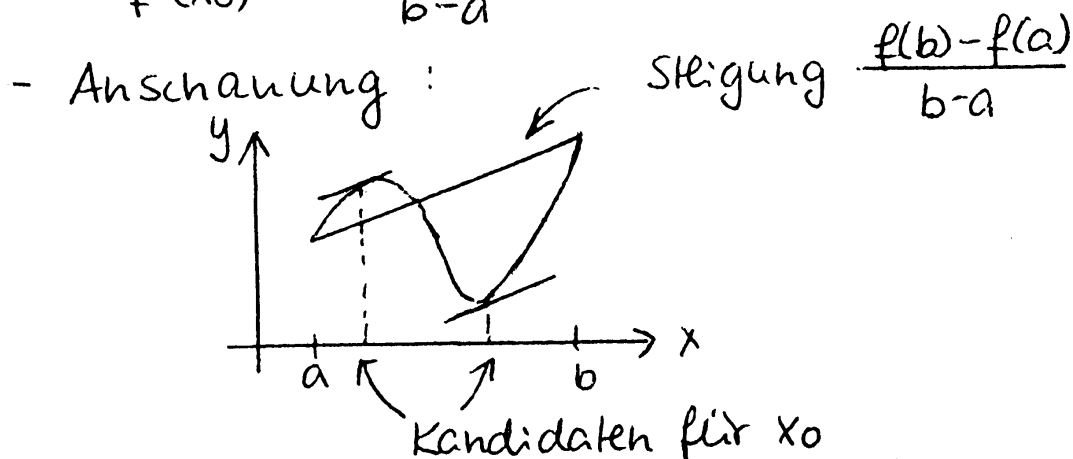
- sind die Basis für die Resultate dieses Abschnitts
- Voraussetzung ist stets: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar
- Der Satz von Rolle: Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es (mindestens ein) $x_0 \in]a, b[$ mit $f'(x_0) = 0$

- Anschauung:



- Merkregel: Eine waagerechte Sekante liefert (mindestens) eine waagerechte Tangente

- Der 1. Mittelwertsatz: Es gibt (mindestens ein) $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


- Merkregel: Eine Sekante liefert (mindestens) eine dazu parallele Tangente.

- Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall ($f(a) = f(b)$)

- Der 2. Mittelwertsatz: Auch $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt (mindestens ein) $x_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

- Der 1. Mittelwertsatz ist ein Spezialfall ($g(x) = x$)

- Der Satz ist Grundlage für Grenzwertberechnungen (siehe 4.)

2. Ableitung und Monotonie

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und

gilt für alle $x \in]a, b[$	so ist f
$f'(x) \geq 0$	monoton wachsend ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$)
$f'(x) > 0$	streng monoton wachsend ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$)
$f'(x) \leq 0$	monoton fallend ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$)
$f'(x) < 0$	streng monoton fallend ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$)

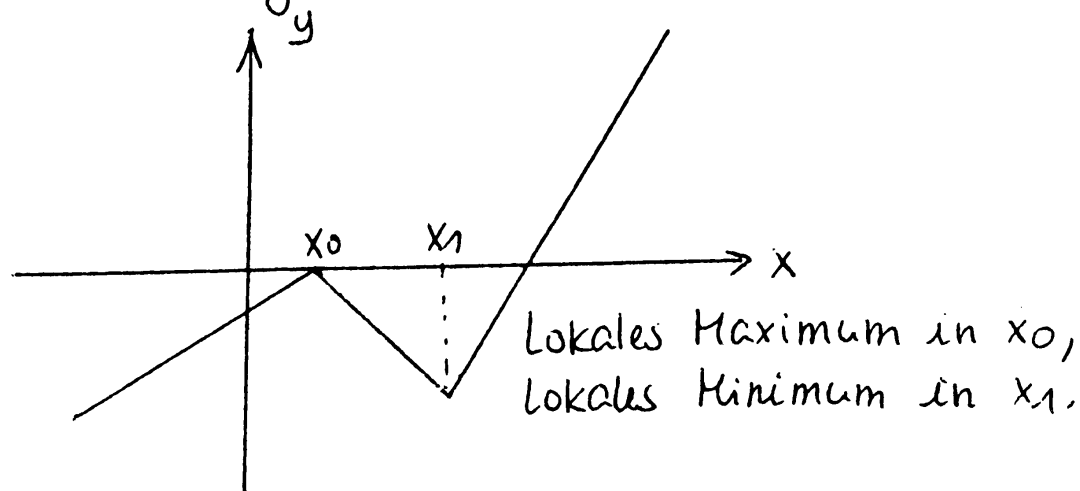
3. Lokale Extrema

- Begriffsbildung: f hat in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle x in einer Umgebung von x_0 gilt.

$f(x_0)$ ist dann das lokale Maximum (bzw. Minimum)

Oberbegriff: Lokales Extremum,

- Anschauung:



- Notwendige Bedingung: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Hat f in $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$. Vorsicht!
offenes
Intervall!
- Hinreichende Bedingung / "einfache Version":
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in]a, b[$. Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.
 Ist $f''(x_0) < 0$ (bzw. > 0), so ist dies ein lokales Maximum (bzw. Minimum).
- Hinreichende Bedingung / "erweiterte Version":
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei n -mal stetig differenzierbar, $n \geq 2$ und $x_0 \in]a, b[$.
 Es gelte $f^{(i)}(x_0) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n-1$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
 - Ist n gerade, so hat f in x_0 ein lokales Extremum.
 Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$ (bzw. > 0), so ist dies ein lokales Maximum (bzw. Minimum).
 - Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

4. Die Regeln von l'Hôpital

- erlauben die Berechnung vieler Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ($a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$),
 wobei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (Typ " $\frac{0}{0}$ ")
 oder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (Typ " $\frac{\infty}{\infty}$ ")
- Existiert unter den soeben notierten Bedingungen $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so ist auch $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

4.4. Taylorpolynome und Taylorreihen: Übersicht

1. Das n . Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt x_0

- existiert, falls f in x_0 n -mal differenzierbar ist
- liefert für $n=1$ die Tangente an den Graphen von f durch $(x_0, f(x_0))$
- lautet
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$
 (dabei ist $f^{(0)} = f$ gesetzt)
- ist charakterisiert durch die Eigenschaften:
 - p_n ist ein Polynom vom Grad $\leq n$
 - $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für alle $k=0, \dots, n$.
- wird zur näherungsweisen Berechnung von $f(x)$ verwendet: $p_n(x)$ ist Näherungswert von $f(x)$.

2. Restgliedabschätzung

- liefert eine Abschätzung für den Fehler $f(x) - p_n(x)$, der beim Rechnen mit Näherungen auftritt
 - übliche Bezeichnung: $R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$
 - Name: n . Restglied von f an der Stelle x_0
- ist f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar, so gibt es \tilde{x} zwischen x und x_0 , so daß

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tilde{x})(x-x_0)^{n+1}$$
 - Name: Restgliedformel nach Lagrange

3. Die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0

- existiert, falls f unendlich oft differenzierbar ist

- hat die Taylorpolynome als Partialsummen, also

$$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$
- ist eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius R bzw. Konvergenzintervall K_R mit 3.3.2.-3.3.3. zu bestimmen sind.
- selbst für $x \in K_R$ kann $t(x) \neq f(x)$ sein.
- Es gilt: $t(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$.
- Falls eine Funktion eine Reihendarstellung hat, ist dies "automatisch" die Taylorreihe.

5. Integralrechnung in \mathbb{R}

5.1. Unbestimmte Integrale: Übersicht

1. Stammfunktionen

I sei ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

- $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f , falls F differenzierbar ist mit $F' = f$.
- Ist F eine Stammfunktion von f , so ist auch \tilde{F} mit $\tilde{F}(x) = F(x) + c$ (c Konstante) eine Stammfunktion von f .
- Sind F und G Stammfunktionen von f , so gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = G(x) + c$.
- f muß keine Stammfunktion besitzen
- Ist f stetig, so hat f eine Stammfunktion.
(vgl. 5.2.)

2. Das unbestimmte Integral

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

- $\int f(x) dx$ bezeichnet eine Stammfunktion von f

- Name: unbestimmtes Integral von f

- Da aus $\int f(x) dx = F(x)$ und $\int f(x) dx = G(x)$

NICHT $F(x) = G(x)$, sondern nur $G(x) = F(x) + c$

folgt, hat sich die Notation

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

eingeblürgert.

3. Grundintegrale

- Alle Ableitungsbeziehungen liefern unbestimmte Integrale.

- Wichtig sind:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$$

$$\text{! } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C \quad (a \in]0, \infty[, a \neq 1)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

! $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{Arsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{Arcosh}(x) + C$$

! Besonders gut merken !

4. Konstanten - und Summenregel

- lauten: $\int (c \cdot f)(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$

$$\int (f+g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- haben die wichtige Anwendung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \Rightarrow \int f(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$$

- Stichwort: Integration von Polynomfunktionen

5. Partielle Integration

- diese Regel folgt aus der Produktregel der Differentialrechnung

- sie lautet:

$$\int g(x) f'(x) dx = g(x) f(x) - \int g'(x) f(x) dx$$

6. Die Substitutionsregel.

- folgt aus der Kettenregel der Differentialrechnung
- lautet $\int f(y) dy \mid y=g(x) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$
- merkt man sich am besten unter Benutzung der Differentialschreibweise: $g(x)=y \Rightarrow g'(x)=\frac{dy}{dx}$. Also

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx \underset{\substack{\uparrow \\ dx \text{ "kürzen" }}}{=} \int f(y) dy$$
- Beim praktischen Arbeiten mit der Substitutionsregel wird ebenfalls vorzugsweise mit Differentialen "gerechnet".

7. Die wichtigsten Standardsubstitutionen

	Integral	Substitution	Bemerkung(en)
Ⓐ	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$y = f(x)$	Ergebnis: $\ln f(x) + C$
Ⓑ	$\int f'(x) f(x) dx$	$y = f(x)$	Ergebnis: $\frac{1}{2}(f(x))^2 + C$
Ⓒ	$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$x = a \cdot \sin(y)$	
Ⓓ	$\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$	$x = a \cdot \sinh(y)$	
Ⓔ	$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = a \cdot \cosh(y)$	
Ⓕ	$\int \text{Rat}(\text{trig}(x)) dx$ \uparrow rat. Fkt. \uparrow trigon. Funktion (sin, cos, tan, cot)	$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$dx = \frac{2}{1+y^2} dy$, $\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}$, $\cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

8. Vier-Schritte-Programm zur Integration gebrochen-rationaler Funktionen.

gegeben: Polynome $p(x), q(x), q \neq 0$

gesucht: $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$

Schritt 1: Polynomdivision (entfällt, falls $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$)

Liefert gegebenenfalls eine Summendarstellung

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int u(x) dx + \int \frac{\tilde{r}(x)}{q(x)} dx,$$

wobei $u(x)$ und $\tilde{r}(x)$ Polynome sind mit $\text{grad}(\tilde{r}) < \text{grad}(q)$.
 $\int u(x) dx$ ist nach 4. bekannt; $\int \frac{\tilde{r}(x)}{q(x)} dx$ bleibt noch zu berechnen.

Schritt 2: Faktorzerlegung des Nenners $q(x)$

Man schreibt $q(x)$ als Produkt von Faktoren des folgenden Typs:

- einer Konstanten d (oft 1)
- $(x-\alpha)^r$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{N}$
 " α ist r -fache Nullstelle des Nenners "
- $(x^2 + \beta x + \gamma)^s$ mit $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $4\gamma - \beta^2 > 0$, $s \in \mathbb{N}$
 " $x^2 + \beta x + \gamma$ ist s -facher quadratischer Faktor ohne reelle Nullstelle vom Nenner "

Schritt 3: Partialbruchzerlegung

Man schreibt den nach Ausklammern von $\frac{1}{d}$ verbleibenden Integranden als Summe:

- zu jedem Faktor $(x-\alpha)^r$ von $q(x)$ gehört ein (selbst aus r Summanden bestehender) Summand

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \dots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} \quad \text{mit Konstanten } A_1, \dots, A_r$$

- zu jedem Faktor $(x^2 + \beta x + \gamma)^s$ mit $4\gamma - \beta^2 > 0$ von $q(x)$ gehört ein (selbst aus s Summanden bestehender) Summand

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \dots + \frac{B_s x + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} \quad \text{mit Konstanten } B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_s$$

Schritt 4: Integration

Man integriere nun Summandenweise; dabei treten folgende Integraltypen auf:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^r} dx, \quad \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} dx$$

9. Formelsammlung zur Integration gebrochen-rationaler Funktionen

$$(1) \int \frac{A}{(x-\alpha)^r} dx = \begin{cases} \frac{A}{1-r} (x-\alpha)^{1-r} + \text{const.} & \text{für } r > 1 \\ A \cdot \ln|x-\alpha| + \text{const} & \text{für } r = 1 \end{cases}$$

Nun sei stets $4\gamma - \beta^2 > 0$.

$$(2) \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^s} dx + (C - \frac{\beta B}{2}) \int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^s} dx$$

$$(3) \int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s} (x^2+\beta x+\gamma)^{1-s} + \text{const.} & \text{für } s > 1 \\ \ln|x^2+\beta x+\gamma| + \text{const.} & \text{für } s = 1 \end{cases}$$

$$(4) \int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma} dx = \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}} \arctan\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\right) + \text{const.}$$

$$(5) \int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^s} dx = \frac{1}{(s-1)(4\gamma-\beta^2)} \cdot \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^{s-1}} + \frac{2(2s-3)}{(s-1)(4\gamma-\beta^2)} \int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{s-1}} dx$$

für $s > 1$.

5.2. Bestimmte Integrale: Übersicht.

1. Bestimmte Integrale.

- Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , so heißt

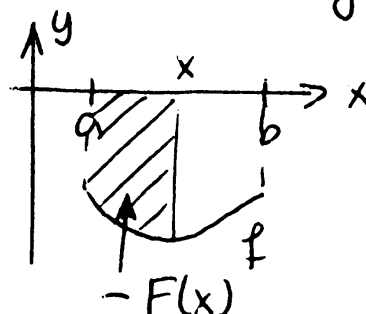
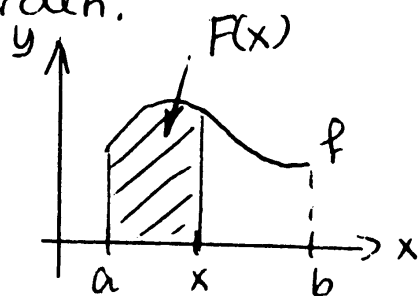
$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

das bestimmte Integral von f in den Grenzen von a bis b .

- $\int_a^b f(x) dx$ ist unabhängig von der ausgewählten Stammfunktion.

2. Die Flächenfunktion und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Flächenfunktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt erklärt:
 $F(x)$ ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis x , wobei Flächen oberhalb der x -Achse positiv, unterhalb der x -Achse negativ gezählt werden.



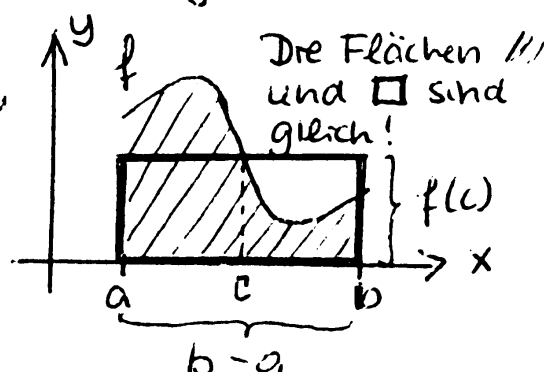
- Es ist $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f . (1. Version des Hauptsatzes)
- Ist G irgendeine Stammfunktion von f , so gilt für alle $x \in [a, b]$: $F(x) = G(x) - G(a)$. (2. Version des Hauptsatzes)
- Spezialfall: $F(b) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx$

Merkregel: Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ beschreibt die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse, wobei Flächen oberhalb der x -Achse positiv, Flächen unterhalb der x -Achse negativ zu zählen sind.

3. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

- ersetzt grob gesprochen bestimmte Integrale durch Rechteck"flächen"
- lautet: Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es mindestens ein $c \in [a, b]$ mit

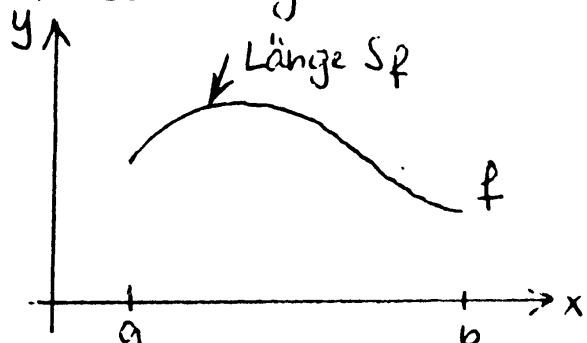
$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$



5.3. Anwendungen bestimmter Integrale: Übersicht.

1. Bogenlängenberechnung.

Anschauung:



- Voraussetzung: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
stetig differenzierbar

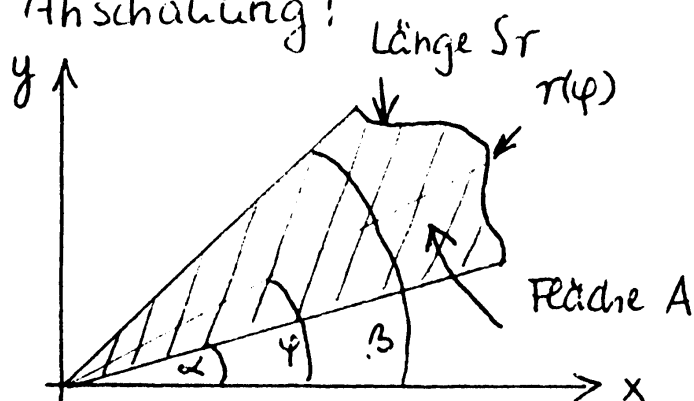
- Formel:

$$S_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- Name für S_f : Bogenlänge

2. Flächen- und Bogenlängenberechnung in Polarkoordinaten

Anschauung:



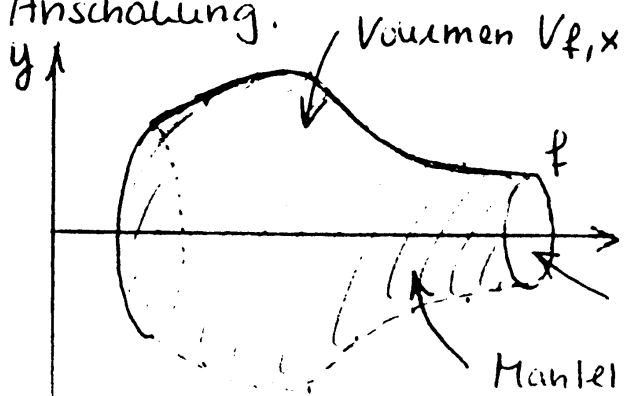
- Voraussetzung: $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, $r: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty[$
stetig (bzw. stetig differenzierbar zur Berechnung von S_r)

- Formel für A: $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2 d\varphi$

- Formel für S_r : $S_r = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}(\varphi)\right)^2} d\varphi$

3. Volumen und Mantelfläche eines Rotationskörpers

Anschauung.



Graph von f rotiert um
die x-Achse

gehört nicht zu $M_{f,x}$

- Voraussetzung: $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ stetig (bzw. stetig differenzierbar zur Berechnung von $M_{f,x}$), $f(x) \geq 0$
- Formel für $V_{f,x}$: $V_{f,x} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$
- Formel für $M_{f,x}$: $M_{f,x} = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} f(x) dx$

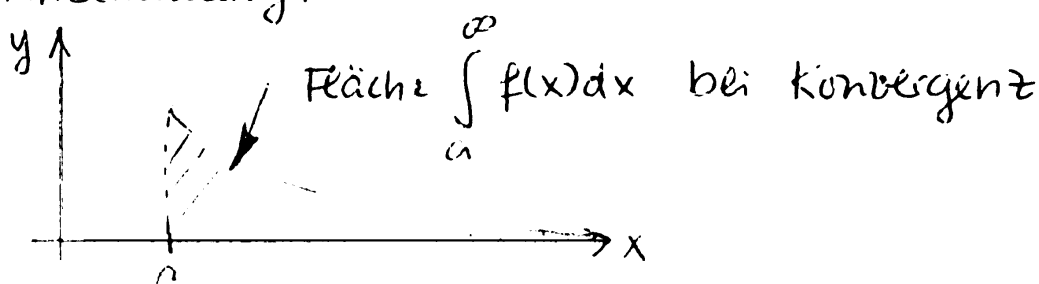
5.4. Integration mittels Potenzreihen: Übersicht.

- Situation: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \neq 0$ und Konvergenzintervall K_R ;
 $f: K_R \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$
- $F: K_R \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \frac{1}{i+1} (x-x_0)^{i+1}$ ist dann eine Stammfunktion von f
- Kurzform: $\int \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i \right) dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \frac{1}{i+1} (x-x_0)^{i+1} + C$
- Merksatz: Potenzreihen werden summandenweise integriert
- Nutzen: u.a. zur näherungsweise Berechnung von Integralen

5.5. Uneigentliche Integrale: Übersicht.

1. Uneigentliche Integrale $\int_a^{\infty} f(x) dx$ und $\int_{-\infty}^a f(x) dx$

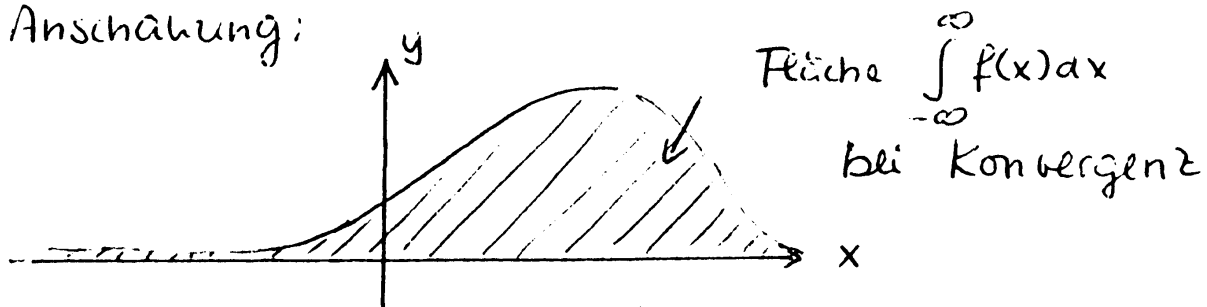
- Voraussetzung: $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f:]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$) stetig
- $\int_a^{\infty} f(x) dx$ (bzw. $\int_{-\infty}^a f(x) dx$) konvergiert, falls
 $\lim_{K \rightarrow \infty} \int_a^K f(x) dx$ (bzw. $\lim_{K \rightarrow -\infty} \int_K^a f(x) dx$) in \mathbb{R} existiert
- Anschauung:



2. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

- Voraussetzung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergiert, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ und $\int_c^{\infty} f(x) dx$ im Sinne von 1. konvergieren.
- In diesem Fall ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$

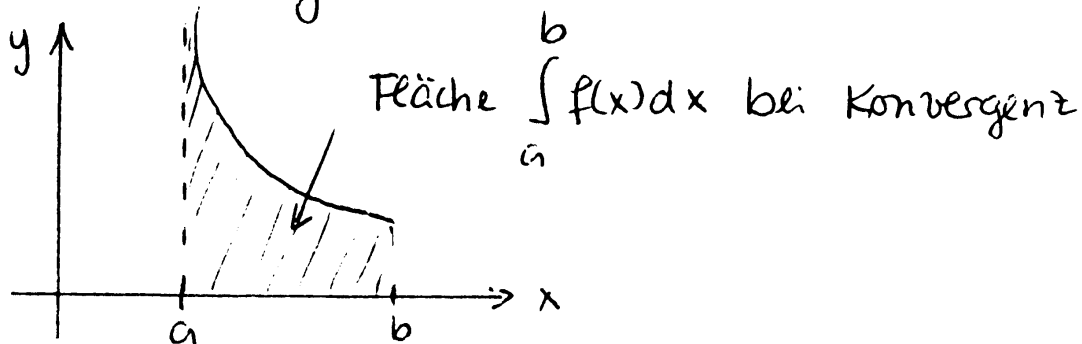
- Anschauung:



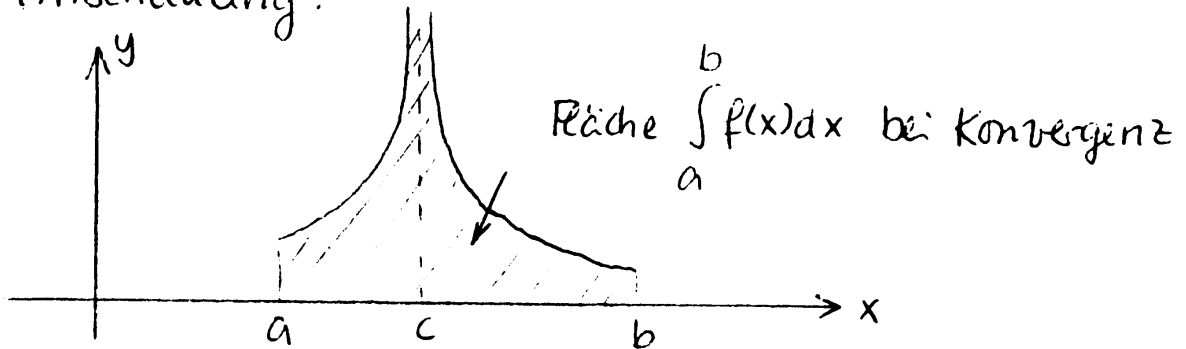
3. Uneigentliche Integrale $\int_a^b f(x) dx$

- a. - Voraussetzung: $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$) stetig
- $\int_a^b f(x) dx$ konvergiert, falls $\lim_{\substack{R \rightarrow a \\ R > a}} \int_R^b f(x) dx$ (bzw. $\lim_{\substack{R \rightarrow b \\ R < b}} \int_a^R f(x) dx$) in \mathbb{R} existiert.

- Anschauung:



- b. - Voraussetzung: $f: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $c \in]a, b[$
- $\int_a^b f(x) dx$ konvergiert, falls $\int_a^c f(x) dx$ und $\int_c^b f(x) dx$ im Sinne von a. konvergieren.
- in diesem Fall ist $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- Anschauung:



6. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

6.1. Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m : Übersicht.

1. Vektorfelder und Skalarfelder

- Unter einem Vektorfeld versteht man eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. ($m, n \in \mathbb{N}$)
- Unter einem Skalarfeld versteht man eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. ($n \in \mathbb{N}$)
- Jedes Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ liefert durch die Vorschrift $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ m Skalarfelder $f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$. f_j heißt die j . Koordinatenfunktion von f . ($j=1, \dots, m$)
- Jedes Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist also durch m Skalarfelder eindeutig beschrieben.

2. Der Graph eines Skalarfeldes

- Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Skalarfeld, so heißt $G_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U \text{ und } f(\vec{x}) = x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph von f .
- Da G_f eine Teilmenge von \mathbb{R}^{n+1} ist, läßt sich G_f höchstens für $n=1$ (altbekannt!) und $n=2$ zeichnen.

3. Niveaumengen (Höhenlinien) eines Skalarfeldes

- Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Skalarfeld und $c \in \mathbb{R}$, so ist $N_c(f) = \{\vec{x} \in U \mid f(\vec{x}) = c\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge (oder Höhenlinie) von f zum Niveau c .
- Kennt man alle Niveaumengen von f , so kennt man den Graphen von f .
- Ist $n=2$, so identifiziert sich $N_c(f)$ mit der Schnittmenge zwischen G_f und der durch $x_3=c$ definierten Ebene. Wegen $N_c(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ läßt sich $N_c(f)$ oft besser graphisch darstellen als G_f .
- Auch für $n=3$ lassen sich Niveaumengen manchmal noch veranschaulichen.

- Auftreten von Niveaumengen im Alltag: Ordnet eine Funktion jedem Punkt eines Landes seine Höhe über dem Meere in m zu, so sind die Niveaumengen gerade die in Landkarten oft verzeichneten Höhenlinien.

4. Partielle Funktionen

- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Skalarfeld und $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$ fest.
Die reelle Funktion $f_i^{\vec{x}^0}$ mit $f_i^{\vec{x}^0}(x_i) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ heißt die i . partielle Funktion von f in \vec{x}^0 ($i=1, \dots, n$).
- Kennt man alle partiellen Funktionen, so kennt man f .
- Partielle Funktionen sind aus der eindimensionalen Analysis vertraute reelle Funktionen.
- Ist $n=2$, so identifiziert sich der Graph der 1. (bzw. 2.) partiellen Funktion von f in $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ mit der Schnittmenge zwischen G_f und der durch $x_2 = x_2^0$ (bzw. $x_1 = x_1^0$) definierten Ebene.
- Mit Hilfe partieller Funktionen kann man den Begriff der Differentialrechnung im \mathbb{R}^n erklären: den Begriff der partiellen Ableitung.

6.2. Partielle Ableitungen: Übersicht.

1. Partielle Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Skalarfeld und $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$.

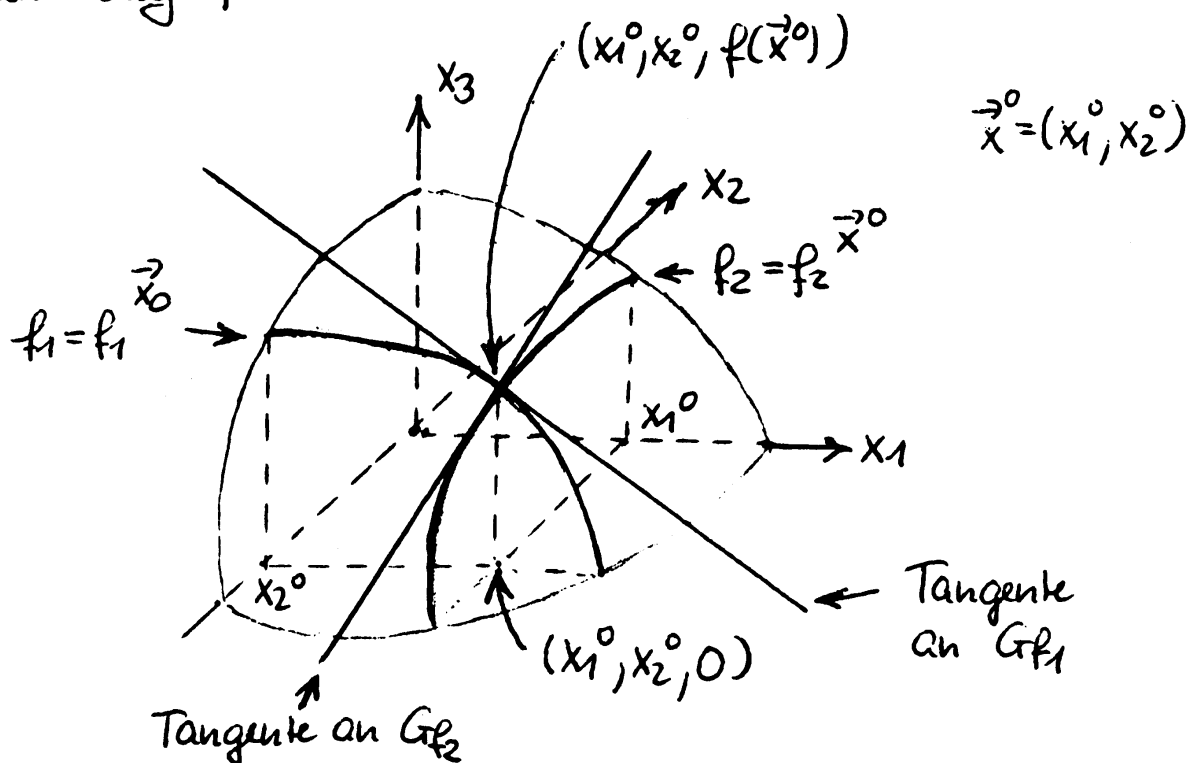
- Ist $f_i^{\vec{x}^0}$ in x_i^0 differenzierbar, so heißt f in \vec{x}^0 partiell nach x_i differenzierbar. Die Ableitung von $f_i^{\vec{x}^0}$ an der Stelle x_i^0 wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0)$$

bezeichnet und heißt die partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle \vec{x}^0 .

Andere Bezeichnung für $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0)$: $f_{x_i}(\vec{x}^0)$.

- f heißt in \vec{x}^0 partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0)$ existieren. ($i=1, \dots, n$)
- Ist f in jedem \vec{x}^0 partiell differenzierbar, so heißt f partiell differenzierbar.
- Anschauung für den Fall $n=2$:



$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0)$ gibt die Steigung des Graphen von f in Richtung der x_i -Achse im Punkte $(x_1^0, x_2^0, f(\vec{x}^0))$ an. ($i=1, 2$).

Über die Steigung in anderen Richtungen ist allgemein nichts gesagt!

2. Kurznotation und "Rezept" zur Berechnung der meisten partiellen Ableitungen

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei partiell differenzierbar.

- Falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind, schreibt man statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ kurz $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$.

Beispiel: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1, \text{ aber } \frac{\partial f}{\partial x_1}(3, 4) = 6.$$

- "Rezept": $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ kann man berechnen, indem man $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ als Konstanten auffaßt und wie in der eindimensionalen Analysis nach x_i differenziert.

3. Stetigkeit / Beziehungen zwischen Stetigkeit und partieller Differenzierbarkeit

- Der Stetigkeitsbegriff bei Skalarfeldern ist eine naheliegende Verallgemeinerung des entsprechenden Begriffs der Differentialrechnung in \mathbb{R} (vgl. 4.1.1. / 4.1.2.)
- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Skalarfeld und $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$.
- f heißt stetig in \vec{x}^0 $\Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) \Leftrightarrow$
für alle Folgen $(x_{1,m}), \dots, (x_{n,m})$ mit $(x_{1,m}, \dots, x_{n,m}) \in U$
für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{1,m} = x_1^0, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = x_n^0$
gilt: $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_{1,m}, \dots, x_{n,m}) = f(\vec{x}^0)$.
- f heißt stetig $\Leftrightarrow f$ ist in jedem $\vec{x}^0 \in U$ stetig.
- Es gibt Skalarfelder, die stetig, aber nicht partiell differenzierbar sind: entsprechende Beispiele findet man schon in der Differentialrechnung in \mathbb{R} . (vgl. 4.2.4.)
- Es gibt Skalarfelder, die partiell differenzierbar, aber nicht stetig sind: entsprechende Beispiele findet man in der Differentialrechnung in \mathbb{R} nicht. (Dort gilt: f differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig, vgl. 4.2.4.)

- Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in $\vec{x}^0 = \vec{0}$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig.

Es gibt also i.a. keine Beziehungen zwischen Stetigkeit und partieller Differenzierbarkeit!

4. Stetig partiell differenzierbare Skalarfelder

- Ein Skalarfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt stetig partiell differenzierbar, falls f partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungsfunktionen $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind ($i=1, \dots, n$), (vgl. 4.2.10, für die Differentialrechnung in \mathbb{R})
- Stetig partiell differenzierbare Skalarfelder sind selbst stetig!

(Nicht nur) aus diesem Grund betrachten wir in Zukunft oft stetig partiell differenzierbare Skalarfelder!

5. Partiiell differenzierbare /stetige/ stetig partiell differenzierbare Vektorfelder, partielle Ableitungen von Vektorfeldern

- Ein Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt partiell differenzierbar (bzw. stetig bzw. stetig partiell differenzierbar), falls die Koordinatenfunktionen $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ für $j=1, \dots, m$ partiell differenzierbar (bzw. stetig bzw. stetig partiell differenzierbar) sind.
- Ist f partiell differenzierbar und $\vec{x}^0 \in U$, so heißt für alle $i=1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}^0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}^0) \right)$$
die partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle \vec{x}^0 .

6. Kurven

- sind Wertebereiche spezieller stetiger Vektorfelder: in 6.1.1. ist $n=1$ zu setzen und U als Intervall zu wählen
- Also: ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, ein stetiges Vektorfeld, so heißt der Wertebereich von f eine Kurve \mathcal{C} im \mathbb{R}^m .

- f heißt dann eine Parameterdarstellung der Kurve \mathcal{C} und die Variable $t \in I$ auch Parameter.
- Ist $I = [a, b]$, so ist $f(a)$ der Anfangspunkt, $f(b)$ der Endpunkt der Kurve \mathcal{C} .
- Oft wird auch die Parameterdarstellung f schon als Kurve bezeichnet.

7. (Stetig) differenzierbare Kurven und Tangenten(vektoren)

- Eine Kurve \mathcal{C} im \mathbb{R}^m heißt (stetig) differenzierbar, falls ihre Parameterdarstellung $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ als Vektorfeld (stetig) partiell differenzierbar nach dem einzigen Parameter t ist.
- In diesem Fall wird die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$ nach dem einzigen Parameter t kurz mit f' bezeichnet;
 $f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_m(t))$ heißt Tangentenvektor an \mathcal{C} im Punkte $f(t)$.
- Ist $f'(t) \neq \vec{0}$, so ist $T = \{ f(t) + k \cdot f'(t) \mid k \in \mathbb{R} \}$ die Tangente an \mathcal{C} im Punkte $f(t)$.
- In diesem Fall steht $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ in $f(t)$ senkrecht auf \mathcal{C} , falls $\langle \vec{w}, f'(t) \rangle = 0$ gilt.

8. Die Kettenregel

- ist eine Verallgemeinerung der aus der Differentialrechnung in \mathbb{R} bekannten Kettenregel (vgl. 4.2.9.) auf Vektorfelder
- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld mit $\vec{x} = g(\vec{y}) \in V$ für alle $\vec{y} \in U$, $f: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ sei ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld.
 Dann ist $h: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $h(\vec{y}) = f(g(\vec{y}))$ für alle $\vec{y} \in U$ stetig partiell differenzierbar und es gilt für alle $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$:

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_i}(\vec{y}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(g(\vec{y})) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(\vec{y})$$
- Besonders wichtig ist der Spezialfall $n=p=1$; nennt man den einzigen Parameter y_1 nun t , so erhält man:

$$h'(t) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t)) \cdot g'_k(t)$$

9. Implizites Differenzieren

- Die nachstehende Formel ist eine Folgerung aus der Kettenregel.
- Sie ermöglicht es, Ableitungswerte reeller Funktionen zu berechnen, falls diese Funktionen nicht explizit, sondern nur durch eine definierende Gleichung "implizit" gegeben sind.
- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar,
 $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^2$ sei stetig partiell differenzierbar
 mit $F(t, f(t)) = 0$ für alle $t \in U$.
 Dann gilt: $f'(t) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, f(t))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, f(t))}$, falls $\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, f(t)) \neq 0$.

6.3. Der Gradient: Übersicht

1. Der Gradient

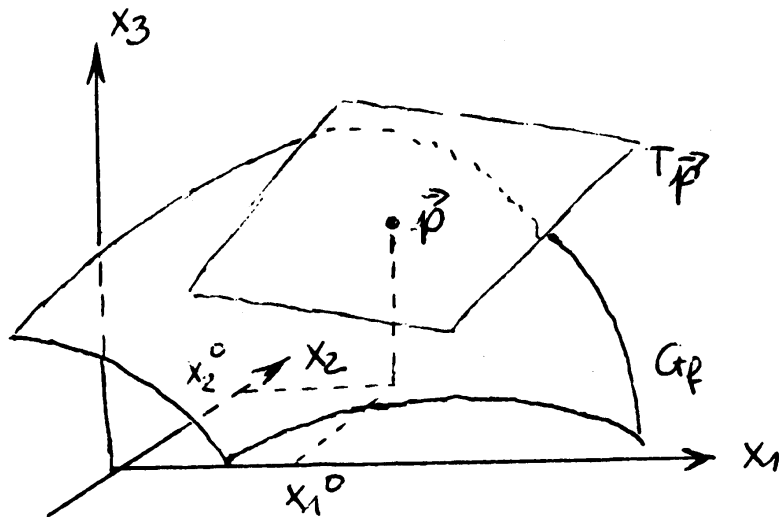
- liefert aus jedem stetig partiell differenzierbaren Skalarfeld f ein stetiges Vektorfeld $\text{grad } f$
- Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar, so ist $\text{grad } f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$
 für alle $\vec{x} \in U$.
- Name von $\text{grad } f$: Gradient von f
- Andere Bezeichnung für $\text{grad } f$: ∇f
 "Nabla"

2. Berechnung von Tangential(hyper)ebenen

- Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar und $\vec{x}^0 \in U$.
 Definiert man $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$t(\vec{x}) = \langle \text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{x} - \vec{x}^0 \rangle + f(\vec{x}^0),$$
 so ist der Graph von t die Tangentialebene $T_{\vec{p}}$ an G_f durch $\vec{p} = (x_1^0, x_2^0, f(\vec{x}^0))$.
 Anschauung auf der folgenden Seite. (*)

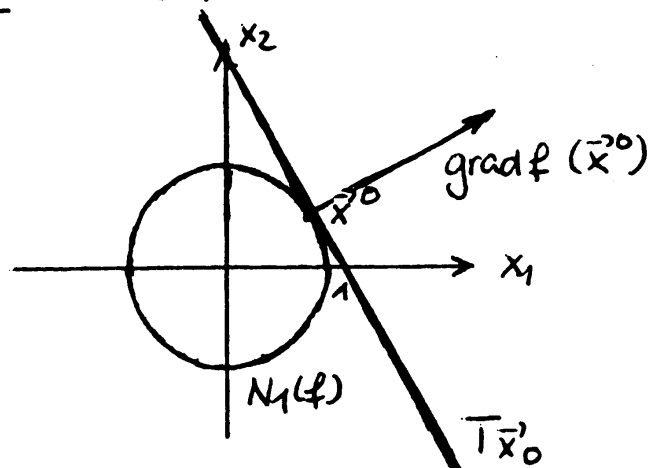


- Ein Vergleich mit 4.2.2, zeigt die Ähnlichkeit von \circledast mit der Tangentengleichung

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$
- Für $n > 2$ liefert \circledast die Gleichung der Tangentialehyperebene $T_{\vec{p}}$ an G_f durch $\vec{p} = (x_1^0, \dots, x_n^0, f(x_1^0, \dots, x_n^0))$.
 Wie G_f läßt sich auch $T_{\vec{p}}$ nicht mehr zeichnen.

3. Weitere geometrische Eigenschaften des Gradienten im Fall $n=2$

- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sei stetig partiell differenzierbar mit $\text{grad } f(\vec{x}) \neq 0$ für alle $\vec{x} \in U$.
- dann sind die nicht-leeren Niveaumengen $N_c(f)$ (zumindest lokal) differenzierbare Kurven
- in jedem $\vec{x}^0 \in N_c(f)$ steht $\text{grad } f(\vec{x}^0)$ senkrecht auf $N_c(f)$
- $T_{\vec{x}^0} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{x} - \vec{x}^0 \rangle = 0 \}$ ist die Tangente an $N_c(f)$ im Punkte \vec{x}^0 .



Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

4. Das totale Differential

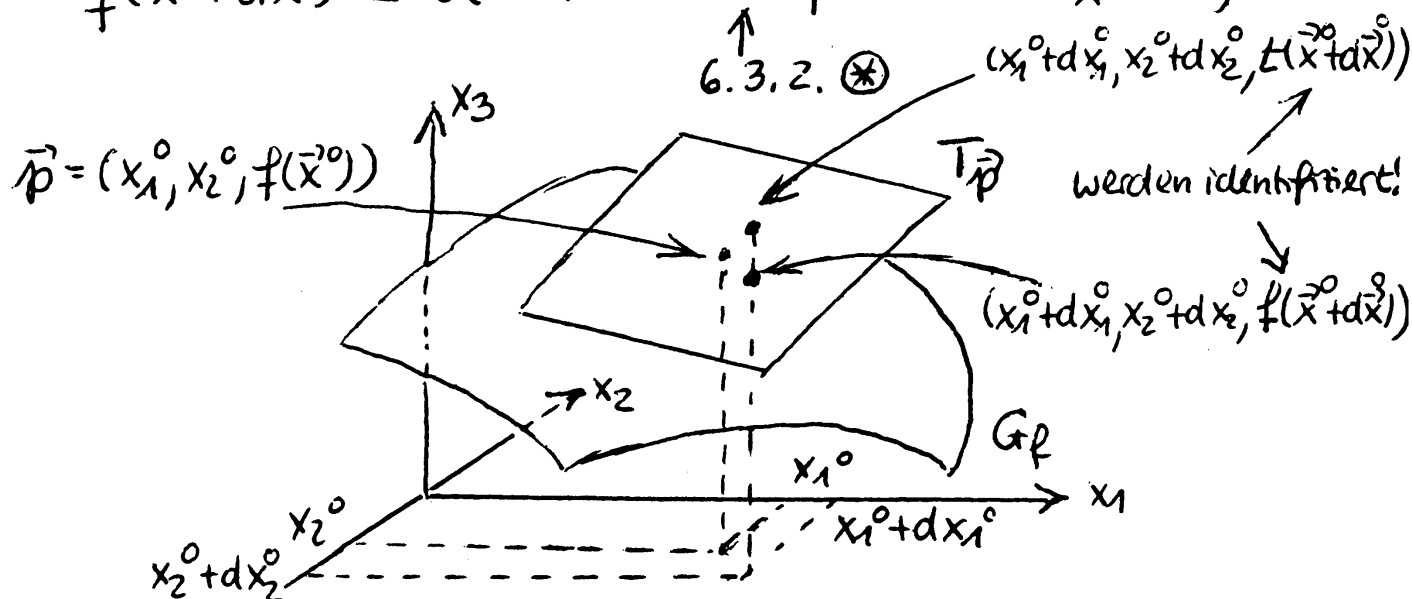
$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stetig partiell differenzierbar, $\vec{x}^0 \in U$.

- Das totale Differential $df_{\vec{x}^0}$ von f in \vec{x}^0 erlaubt es, bei fehlerhafter Eingabe von $\vec{x}^0 + d\vec{x}^0$ statt \vec{x}^0 (z.B. durch Rundung) eine Aussage über die ebenfalls fehlerhafte Ausgabe zu machen: statt $f(\vec{x}^0)$ wird ungefähr $f(\vec{x}^0) + df_{\vec{x}^0}$ ausgegeben.
- Berechnung: Ist $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $d\vec{x}^0 = (dx_1^0, \dots, dx_n^0)$, so gilt

$$\begin{aligned} df_{\vec{x}^0} &= \langle \text{grad } f(\vec{x}^0), d\vec{x}^0 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) \cdot dx_i^0 \end{aligned}$$

- Hintergrund und Anschauung für $n=2$:

$$f(\vec{x}^0 + d\vec{x}^0) \cong t(\vec{x}^0 + d\vec{x}^0) = f(\vec{x}^0) + df_{\vec{x}^0}$$



wobei der Graph von t die Tangentialebene $T_{\vec{p}}$ an G_f durch $(x_1^0, x_2^0, f(\vec{x}^0)) = \vec{p}$ ist.

- Wie bei den partiellen Ableitungen schreibt man kurz $df_{\vec{x}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \cdot dx_i$,

falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

5. Richtungsableitungen

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stetig partiell differenzierbar,
 $\vec{x}^0 \in U$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{v}| = 1$.

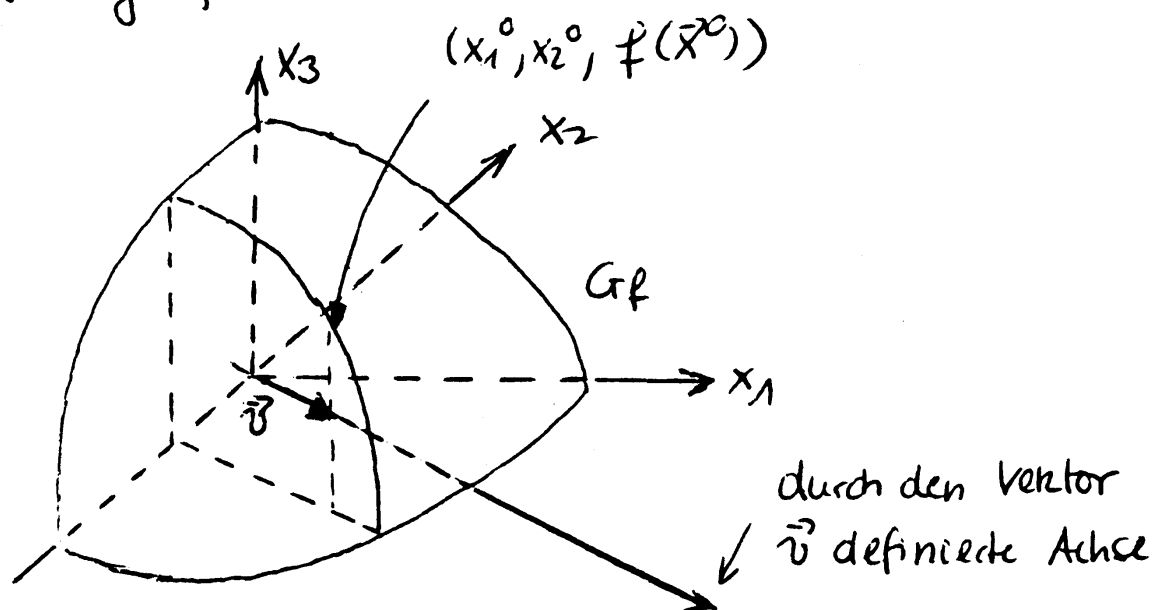
- $D_{\vec{v}} f(\vec{x}^0) = \langle \text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{v} \rangle$ heißt die Richtungs-
ableitung von f in \vec{x}^0 in Richtung \vec{v} .

- Ist $\vec{v} = \vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i. \text{ Koordinate}}}{1}, 0, \dots, 0)$ (vgl. 1.2.7.), so ist

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0), \quad (i=1, \dots, n)$$

- Richtungsableitungen sind also Verallgemeinerungen
 partieller Ableitungen.

- Anschauung für $n=2$:



$D_{\vec{v}} f(\vec{x}^0)$ gibt die Steigung des Graphen von f
 in Richtung der durch den Vektor \vec{v} definierten
 Achse im Punkte $(x_1^0, x_2^0, f(\vec{x}^0))$ an.

6. Gradient und stärkster Anstieg

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stetig partiell differenzierbar,
 $\vec{x}^0 \in U$ mit $\text{grad } f(\vec{x}^0) \neq \vec{0}$.

Dann gibt $\text{grad } f(\vec{x}^0)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f in \vec{x}^0 an; dieser ist $|\text{grad } f(\vec{x}^0)|$.

- Alltagserfahrung: Wer senkrecht zu den Höhenlinien auf die Berge steigt, wählt den steilsten Weg!

6.4. Höhere partielle Ableitungen und lokale Extrema:

Übersicht

1. Zweite partielle Ableitungen / höhere partielle Ableitungen

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stetig partiell differenzierbar.
Ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für jedes $i=1, \dots, n$ (stetig) partiell differenzierbar,
so heißt f zweimal (stetig) partiell differenzierbar.

Die 2. partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ werden auch wie folgt bezeichnet: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $f_{x_i x_j}$

Höhere partielle Ableitungen sind sinngemäß erklärt!

2. Der Satz von Schwarz

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

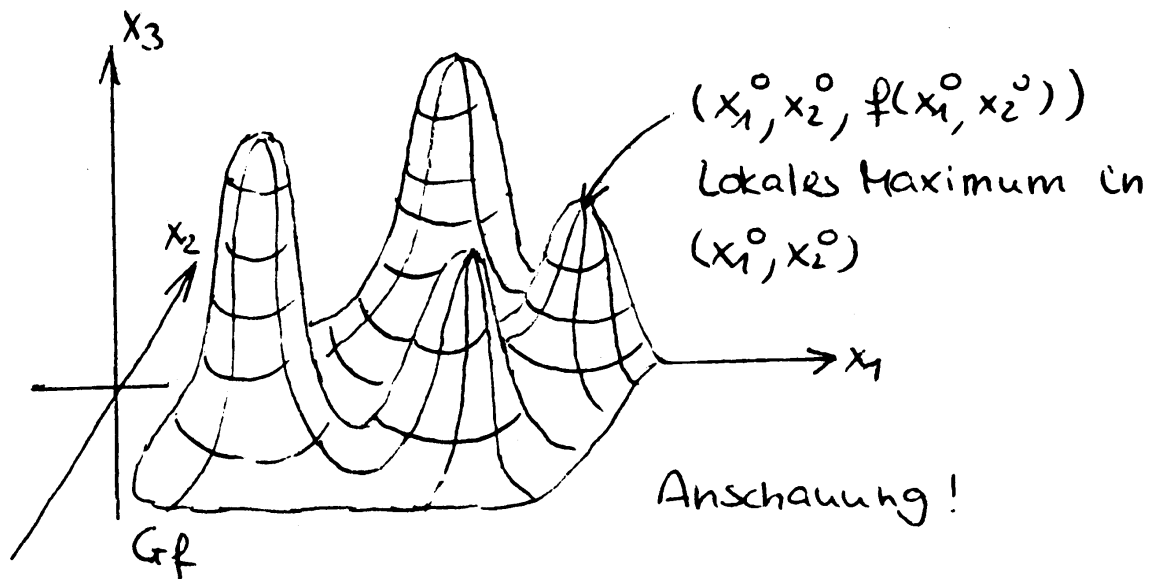
$$f_{x_i x_j}(\vec{x}) = f_{x_j x_i}(\vec{x})$$

für alle $\vec{x} \in U$ und $i, j=1, \dots, n$.

3. Lokale Extrema für Skalarfelder $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$

- vgl. auch 4.3.3. für die eindimensionale Situation

- Begriffsbildung: f hat in $\vec{x}^0 \in U$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}^0)$ (bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^0)$) für alle \vec{x} in einer Umgebung von \vec{x}^0 gilt.
 $f(\vec{x}^0)$ ist dann das lokale Maximum (bzw. Minimum).
Oberbegriff: Lokales Extremum.



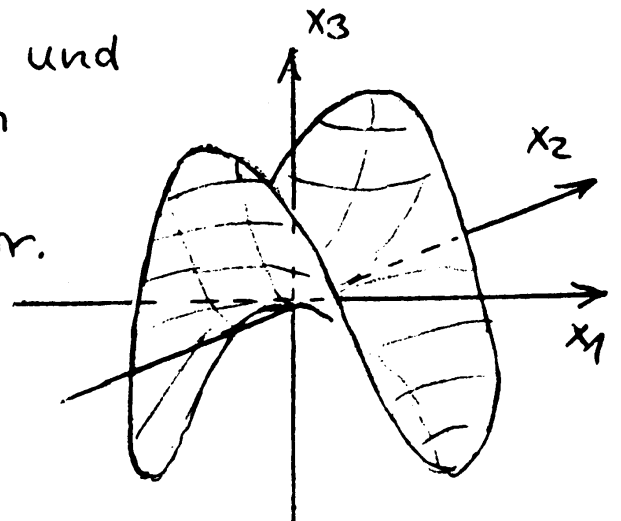
- Notwendige Bedingung: f sei partiell differenzierbar, U offen. Hat f in \vec{x}^0 ein lokales Extremum, so gilt $\text{grad } f(\vec{x}^0) = \vec{0}$.
- Hinreichende Bedingung: f sei zweimal stetig partiell differenzierbar, U offen.

Man betrachte die Hesse-Matrix

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{x} \in U.$$

- Ist $\vec{x}^0 \in U$ mit $\text{grad } f(\vec{x}^0) = \vec{0}$ und $\det H_f(\vec{x}^0) > 0$, so liegt in \vec{x}^0 ein lokales Extremum vor.
Ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}^0) < 0$ (bzw. > 0), so ist dies ein lokales Maximum (bzw. Minimum).
- Ist $\vec{x}^0 \in U$ mit $\text{grad } f(\vec{x}^0) = \vec{0}$ und $\det H_f(\vec{x}^0) < 0$, so liegt in \vec{x}^0 kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Anschauung: Sattelpunkt im Nullpunkt



7. Gewöhnliche Differentialgleichungen

7.1. Allgemeines über Differentialgleichungen

1. Ordnung: Übersicht

1. Eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung

1. Ordnung

- ist von der Form $y' = f(x, y)$, wobei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Skalarfeld ist
- jede differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, mit $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.
Es gibt i.a. viele Lösungen!
- Gilt zusätzlich $y(x_0) = y_0$, so spricht man von einer Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.
Oft (nicht immer!) sind Anfangswertaufgaben eindeutig lösbar.

2. Linienelemente und Richtungsfelder

- helfen manchmal bei der Veranschaulichung der Lösungsmenge einer Differentialgleichung wie in 7.1.1.
- Ist $y' = f(x, y)$ wie in 7.1.1. vorgelegt, so heißt zu jedem $(x, y) \in U$ das Tripel $(x, y, f(x, y))$ ein Linienelement. Man veranschaulicht sich ein Linienelement, indem man durch jedes $(x, y) \in U$ ein kleines Geradenstück mit Steigung $f(x, y)$ zeichnet.
- Die Gesamtheit aller Linienelemente heißt Richtungsfeld.

- Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sind differenzierbare Funktionen y mit folgender Eigenschaft: die Steigung des Graphen im Punkt $(x, y(x))$ stimmt stets mit der Steigung des zugehörigen Linienelementes überein.

7.2. Trennung der Variablen und verwandte Lösungsverfahren: Übersicht

1. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

- sind von der Form $y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$ mit stetigen Funktionen f_1 und f_2 , $f_2(y) \neq 0$.
- lassen sich nach folgendem Schema lösen:
 1. Man schreibe $\frac{dy}{dx}$ statt y' .
 2. Man stelle die Gleichung so um, daß y nur auf der linken, x nur auf der rechten Seite der Gleichung vorkommt. ("Trennung der Variablen")
 3. Man integriere beide Seiten; so erhält man die Lösung in "impliziter Form".
 4. Nach Möglichkeit löse man nach y auf.
- Das Resultat nach Schritt 3 läßt sich allgemein formulieren. Ist F_1 bzw. F_2 eine Stammfunktion von f_1 bzw. f_2 , so gilt $F_2(y) = F_1(x) + \text{const.}$

2. Substitutionsverfahren

- Manche Differentialgleichungen lassen sich durch Substitution auf Differentialgleichungen mit getrennten Variablen zurückführen.
- Zwei wichtige Ansätze:

$y' = f(ax+by+c)$		$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
läßt sich durch den Ansatz		
$z = ax+by+c$		$z = \frac{y}{x}$

 in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für z überführen. ("Substitution der Klammer")

7.3. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung und Verwandtes: Übersicht.

1. Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

- hat die Form $y' = p(x) \cdot y + q(x)$, wobei p und q stetige Funktionen sind.
Ist $q(x) = 0$, so heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen.

2. Die allgemeine Lösung.

- von $y' = p(x) \cdot y + q(x)$ ist die Summe von einer speziellen Lösung y_s dieser Differentialgleichung und von der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung $y' = p(x) \cdot y$.
(vgl. eine ähnliche Struktur bei linearen Gleichungssystemen, 1.4.3.)
- erhält man also in 3 Schritten:
 1. Schritt: Bestimme allgemeine Lösung y_h von $y' = p(x) \cdot y$
 - Methode: Trennung der Variablen
 - Ergebnis: $y_h = C \cdot \exp(P(x))$, $C \in \mathbb{R}$, P Stammfunktion von p
 2. Schritt: Bestimme eine spezielle Lösung y_s von $y' = p(x) \cdot y + q(x)$
 - Ansatz: $y_s = C(x) \cdot \exp(P(x))$
 - Name: Variation der Konstanten
 - Ergebnis: Wähle $C(x)$ so, daß $C'(x) = \exp(-P(x)) \cdot q(x)$ gilt.
 3. Schritt: Die allgemeine Lösung von $y' = p(x) \cdot y + q(x)$ ist dann $y = y_h + y_s$.

3. Eine Bernoullische Differentialgleichung.

- hat die Form $y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^\alpha$, wobei p und q stetige Funktionen sind und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

- läßt sich durch die Substitution $z(x) = y(x)^{1-x}$ in eine lineare Differentialgleichung für z überführen; so erhält man Lösungen $y \neq 0$.

7.4. Lineare Differentialgleichungen n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Übersicht

1. Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- hat die Form $y'' + ay' + by = f(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion f .
Ist $f(x) = 0$, so heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen.

2. Die allgemeine Lösung

- von $y'' + ay' + by = f(x)$ ist die Summe von einer speziellen Lösung y_s dieser Differentialgleichung und von der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y'' + ay' + by = 0$.

- erhält man also in 3 Schritten:

1. Schritt: Bestimme die allgemeine Lösung y_h von $y'' + ay' + by = 0$.

- Methode: Siehe 3.

2. Schritt: Bestimme eine spezielle Lösung y_s von $y'' + ay' + by = f(x)$.

- Methode: Siehe 4. oder 5.

3. Schritt: Die allgemeine Lösung von $y'' + ay' + by = f(x)$ ist dann $y = y_h + y_s$.

3. Die allgemeine Lösung von der homogenen Differentialgleichung $y'' + ay' + by = 0$

- ist abhängig von der Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ gemäß

folgender Tabelle:

Nullstellen	allgemeine Lösung
Reell, verschieden: λ_1, λ_2	$y = c_1 \cdot \exp(\lambda_1 x) + c_2 \cdot \exp(\lambda_2 x)$
Reell, doppelt: λ	$y = c_1 \cdot \exp(\lambda x) + c_2 \cdot x \cdot \exp(\lambda x)$
Nicht reell: $\lambda_1 = p + i \cdot q$, $\lambda_2 = p - i \cdot q$, $q > 0$	$y = c_1 \cdot \exp(p x) \cdot \cos(q x) + c_2 \cdot \exp(p x) \cdot \sin(q x)$

4. Verfahren zur Bestimmung einer speziellen Lösung von $y'' + ay' + by = f(x)$ für einige Fälle von $f(x)$

- Name: Störgliedansatz

① $f(x)$	② $y_s(x)$	③
Polynom vom Grad n	Polynom vom Grad n	0
$k \cdot \exp(p x)$	$C \cdot \exp(p x)$	p
$k \cdot \cos(q x), k \cdot \sin(q x)$	$C \cdot \cos(q x) + \tilde{C} \cdot \sin(q x)$	$i q$
$k \cdot \exp(p x) \cdot \cos(q x), k \cdot \exp(p x) \cdot \sin(q x)$	$C \cdot \exp(p x) \cdot \cos(q x) + \tilde{C} \cdot \exp(p x) \cdot \sin(q x)$	$p + i q$

- Einen Ansatz zur Bestimmung von y_s erhält man wie folgt:

Man suche $f(x)$ in Spalte ①. Spalte ② liefert dann den Ansatz für $y_s(x)$ bis auf folgende Ausnahme: Ist die Zahl in Spalte ③ einfache (bzw. doppelte)

Nullstelle des charakteristischen Polynom, so ist der Ansatz aus Spalte ② mit x (bzw. x^2) zu multiplizieren.

5. Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch "Variation der Konstanten"

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$(*) \quad y'' + ay' + by = f(x).$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

sei mit Hilfe von 3. bestimmt und laute

$$y_h = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann gibt es eine spezielle Lösung

$$y_s = c_1(x) \cdot f_1(x) + c_2(x) \cdot f_2(x)$$

von $(*)$, wobei

$$c_1'(x) = \frac{-f_2(x) f(x)}{W(x)};$$

$$c_2'(x) = \frac{f_1(x) f(x)}{W(x)}.$$

$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$ ist dabei die Wronski-

Determinante, die stets von Null verschieden ist.

Vorteil von Methode 5: Funktioniert im Prinzip immer!

Nachteile " " " : Kann "lang" werden und auf "unangenehme" Integrale führen.

6. Lineare Differentialgleichungen n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten - ein Überblick

- Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und stetigem f heißt eine lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Ist $f(x) = 0$, so heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen.

- Die allgemeine Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x) \quad (*)$$

bestimmt man wie folgt in 3 Schritten:

1. Schritt:

Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Diese ist von der Form

$$y_h = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) \quad \text{mit } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Dabei korrespondieren die sogenannten Basislösungen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ zu den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Jede k -fache reelle Nullstelle λ von p liefert k Basislösungen

$$\exp(\lambda x), \dots, x^{k-1} \exp(\lambda x);$$

jedes Paar k -facher komplexer Nullstellen
 $p \pm iq$ ($q > 0$) liefert $2k$ Basislösungen
 $\exp(px) \cos(qx), \dots, x^{k-1} \exp(px) \cos(qx);$
 $\exp(px) \sin(qx), \dots, x^{k-1} \exp(px) \sin(qx).$

2. Schritt:

Eine spezielle Lösung y_s von $(*)$ ist von der Form

$$y_s = c_1(x) f_1(x) + \dots + c_n(x) f_n(x).$$

Dabei gilt für $i = 1, \dots, n$

$$c_i'(x) = \frac{w_i(x)}{W(x)}$$

$$\text{wobei } W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante ist und

$$w_i(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_{i-1}(x) & 0 & f_{i+1}(x) & \dots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_{i-1}^{(n-1)}(x) & 0 & f_{i+1}^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

\uparrow
 Spalte i

3. Schritt:

Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist dann die Summe der Ergebnisse aus Schritt 1 und Schritt 2, also

$$y = y_h + y_s.$$

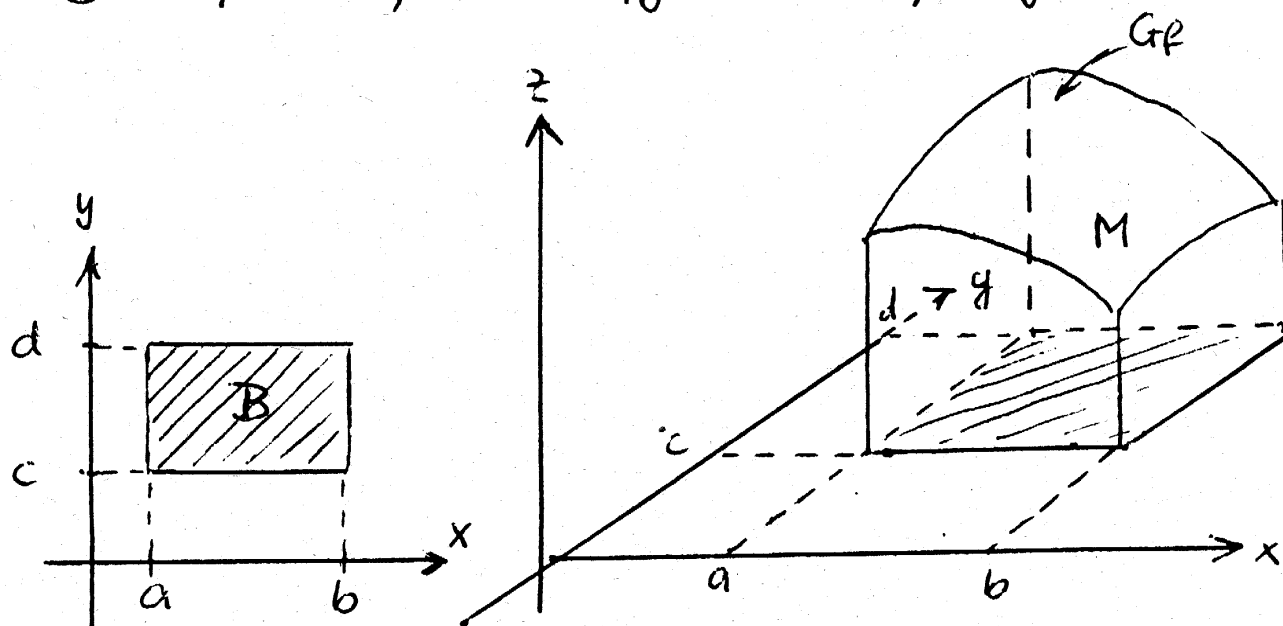
8. Integralrechnung im \mathbb{R}^n

8.1. Bereichsintegrale im \mathbb{R}^2 (Doppelintegrale):

1. Bereichsintegrale über achsenparallelen Rechtecken

- Giefern das Volumen V des Körpers M zwischen dem Graphen von f und der x - y -Ebene im rechteckigen Bereich

$$B = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \in \mathbb{R}^2$$



Dabei ist $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in B$.

- werden wie folgt bezeichnet:

$$V = \iint_B f(x, y) dx dy = \iint_B f(x, y) dF$$

Name: Bereichsintegral von f über B

- werden wie folgt berechnet:

$$V = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy$$

- oder wahlweise:

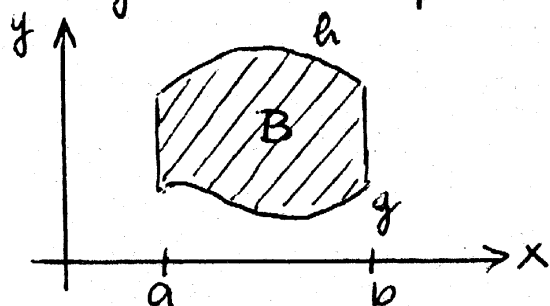
$$V = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx$$

2. Bereichsintegrale über Normalbereichen

- liefern das Volumen V des Körpers M zwischen dem Graphen von f und der x - y -Ebene im Normalbereich

$$B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Dabei sind $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$.



$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig mit $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in B$.

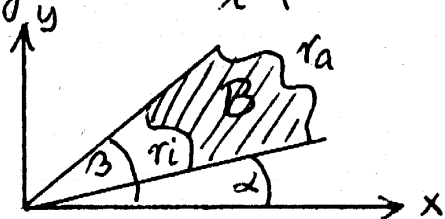
- werden wie bei 1. bezeichnet und benannt
- werden wie folgt berechnet: $V = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$

3. Bereichsintegrale über Normalbereichen in Polarkoordinaten

- liefern das Volumen V des Körpers mit zwischen dem Graphen von f und der x - y -Ebene im Normalbereich in Polarkoordinaten

$$B = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_i(\varphi) \leq r \leq r_a(\varphi)\}.$$

Dabei sind $r_i: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty[$ und $r_a: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty[$ stetig mit $r_i(\varphi) \leq r_a(\varphi)$ für alle $\varphi \in [\alpha, \beta]$.



$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig mit $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in B$.

- werden wie bei 1. bezeichnet und benannt
- werden wie folgt berechnet:

$$V = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \left(\int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cdot \underline{\underline{r}} dr \right) d\varphi$$

4. Anwendungen von Bereichsintegralen im \mathbb{R}^2

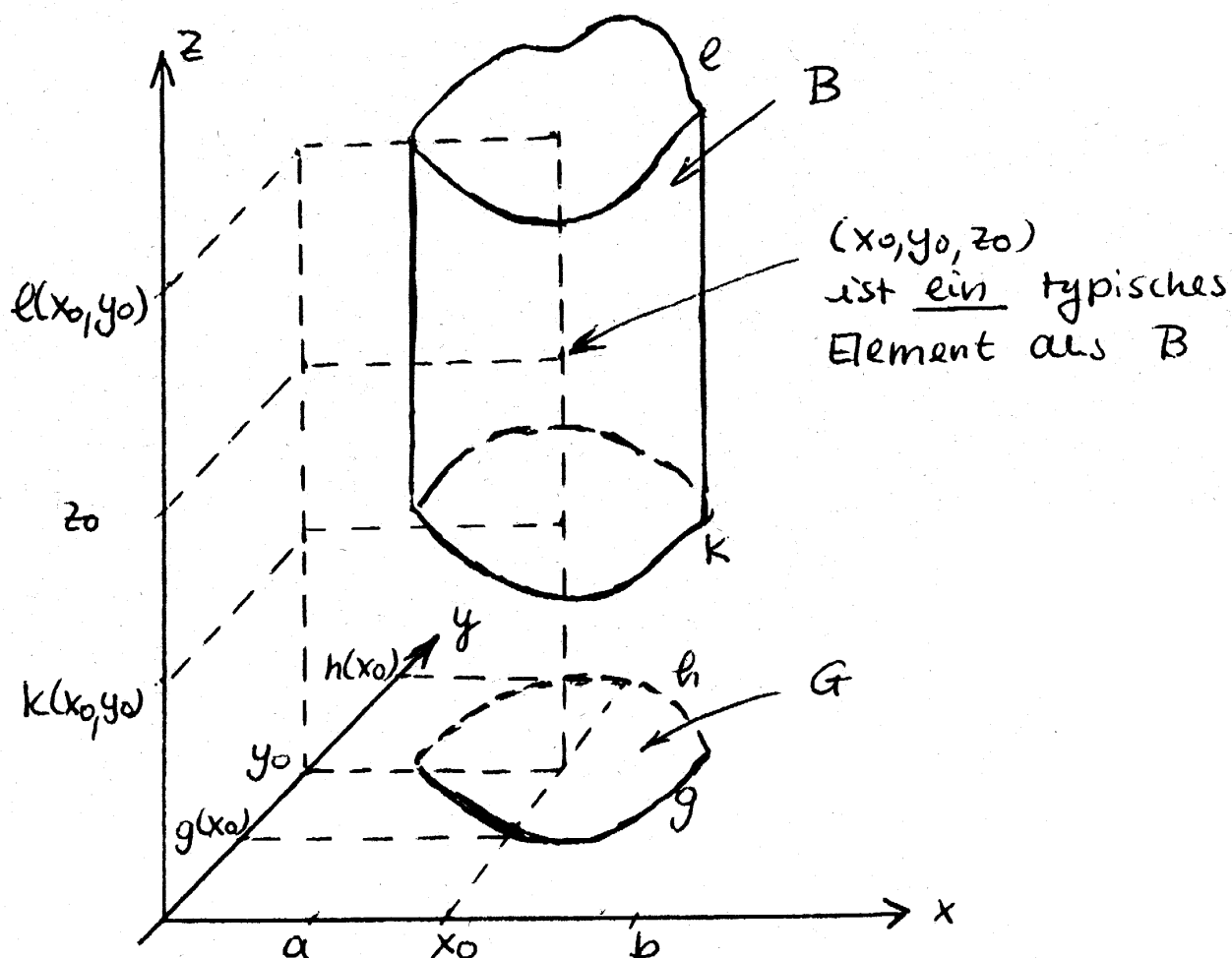
Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, so ist

- $A = \iint_B dF$ sein Flächeninhalt;
- $x_s = \frac{1}{A} \iint_B x dF$ die x -Koordinate seines Schwerpunktes,
- $y_s = \frac{1}{A} \iint_B y dF$ die y -Koordinate seines Schwerpunktes.

(Bei den Schwerpunktsberechnungen ist Homogenität, d.h. konstante Dichte, vorausgesetzt)

8.2. Bereichsintegrale im \mathbb{R}^3 (Dreifachintegrale): Übersicht

1. Ein Normalbereich im \mathbb{R}^3



- hat die Form

$$B = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq h(x); k(x,y) \leq z \leq l(x,y)\},$$

wobei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $k: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell: G \rightarrow \mathbb{R}$, $G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, stetig sind mit $k(x, y) \leq \ell(x, y)$ für alle $(x, y) \in G$.

2. Ein Bereichsintegral über einem Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$

- kann man für stetiges $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen
- wird wie folgt bezeichnet:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(x, y, z) dV$$

- wird für B wie in 1. wie folgt berechnet:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{k(x, y)}^{\ell(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

3. Anwendungen von Bereichsintegralen im \mathbb{R}^3

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich, so ist

- $R = \iiint_B dV$ sein Rauminhalt (Volumen);
- $x_s = \frac{1}{R} \iiint_B x dV$ die x -Koordinate seines Schwerpunktes;
- $y_s = \frac{1}{R} \iiint_B y dV$ die y -Koordinate seines Schwerpunktes;
- $z_s = \frac{1}{R} \iiint_B z dV$ die z -Koordinate seines Schwerpunktes.

(Bei den Schwerpunktsberechnungen ist wieder Homogenität vorausgesetzt)

4. Ein Normalbereich im \mathbb{R}^3 in Zylinderkoordinaten

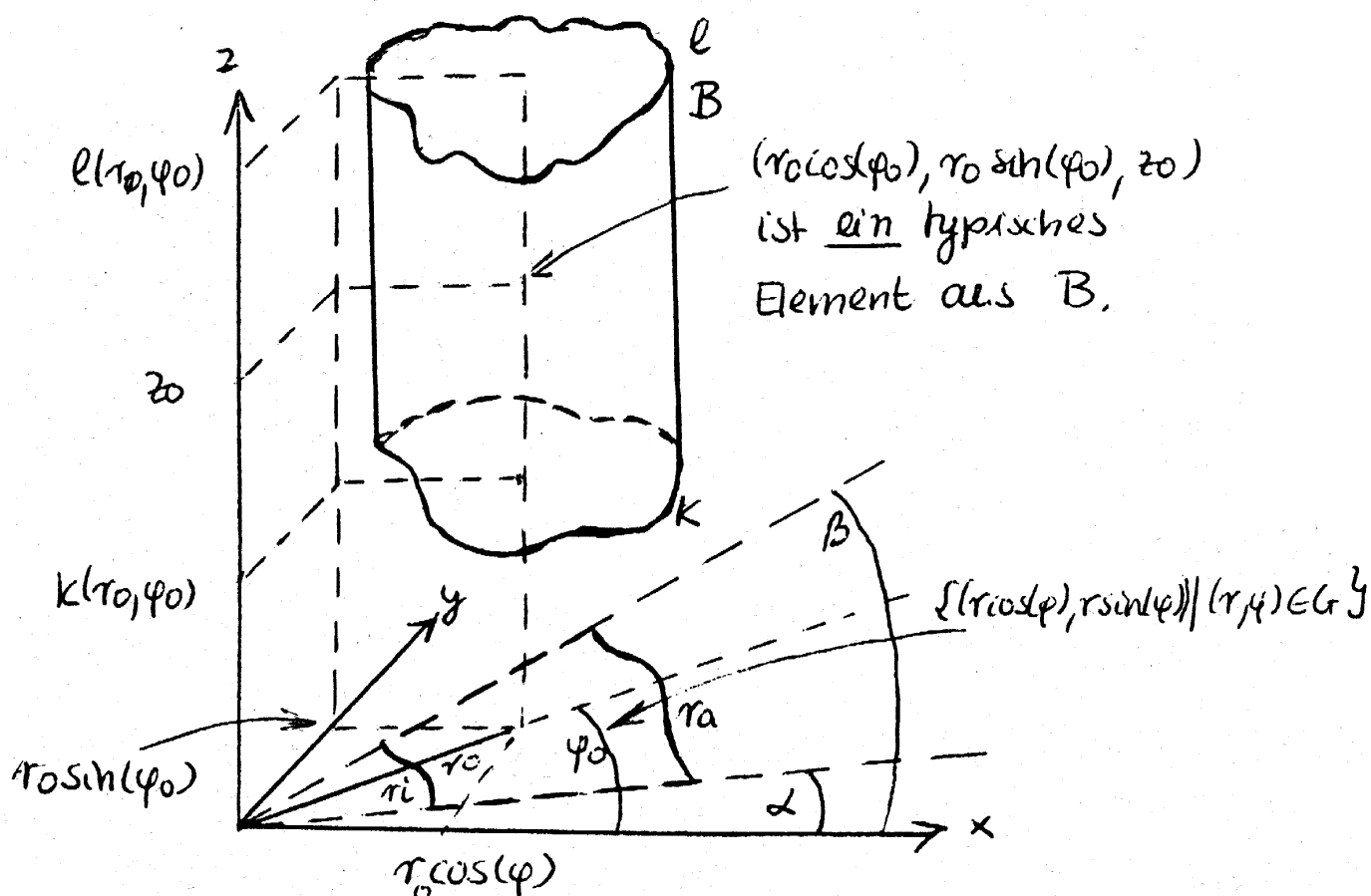
- hat die Form

$$B = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_i(\varphi) \leq r \leq r_a(\varphi), k(r, \varphi) \leq z \leq \ell(r, \varphi)\}$$

wobei $r_i: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty[$ und $r_a: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty[$ stetig sind mit $r_i(\varphi) \leq r_a(\varphi)$ für alle $\varphi \in [\alpha, \beta]$ und

$k: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell: G \rightarrow \mathbb{R}$, $G = \{(r, \varphi) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_i(\varphi) \leq r \leq r_a(\varphi)\}$ stetig sind mit $k(r, \varphi) \leq \ell(r, \varphi)$ für alle $(r, \varphi) \in G$.

Bild auf der folgenden Seite!



5. Ein Bereichsintegral über einem Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ in Zylinderkoordinaten

- wird für B wie in 4. und stetiges $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt berechnet: $r_a(\varphi)$ $l(r, \varphi)$

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} \left(\int_{k(r, \varphi)}^{l(r, \varphi)} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) r dz \right) dr \right) d\varphi$$

8.3. Kurvenintegrale: Übersicht.

1. Das Kurvenintegral von F längs \mathcal{C}

- ist für ein stetiges Vektorfeld $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, (vgl. 6.2.5.) und für eine stetig differenzierbare Kurve $\mathcal{C} \subseteq U$ mit Parameterdarstellung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (vgl. 6.2.7.) erklärt.

- wird wie folgt bezeichnet: $\int_{\mathcal{C}} \langle F, dr \rangle$

- wird wie folgt berechnet:

$$\int_C \langle F, dr \rangle = \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t) \rangle dt$$

- Anderer Name: Linienintegral von F längs C

- Wichtige Anwendung: Bewegt sich in einem Kraftfeld \vec{F} ein Massenpunkt längs einer Kurve C , so wird die Arbeit $W = \int_C \langle F, dr \rangle$ verrichtet.

2. (un)abhängigkeit des Kurvenintegrals von der Gestalt der Verbindungskurve.

- i.a. hängt der Wert des Kurvenintegrals nicht nur vom Anfangspunkt $A = f(a)$ und Endpunkt $B = f(b)$ der Kurve ab, sondern auch von der Gestalt der Verbindungskurve.
- Unter "guten" Voraussetzungen an F tritt jedoch Un-
abhängigkeit ein. Dazu:

3. Ein konservatives Vektorfeld

- $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, hat die Form $F = \text{grad } G$, wobei $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig partiell differenzierbares Skalarfeld ist.

Man nennt G ein Potential von F .

- mit Potential G hat folgende Eigenschaft:

$$(1) \quad \int_C \langle F, dr \rangle = G(B) - G(A)$$

für jede stetig differenzierbare Kurve $C \subseteq U$ mit Anfangspunkt A und Endpunkt B
(Hauptsatz über Kurvenintegrale)

- hat ferner folgende Eigenschaften:

$$(2) \quad \int_C \langle F, dr \rangle = 0$$

für jede geschlossene differenzierbare Kurve $C \subseteq U$

$$(3) \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n$$

- Eigenschaft (2) charakterisiert konservative Vektorfelder; Eigenschaft (3) charakterisiert konservative Vektorfelder unter "guten" Voraussetzungen an U (z.B. $U = \mathbb{R}^n$),

4. Potentialbestimmung

Gegeben : $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig

Frage : Existiert G mit $F = \text{grad } G$?

Gegebenenfalls : $G = ?$

1. Schritt : Überprüfe durch Nachweis von (3) aus 3., ob F konservativ ist.

Gegebenenfalls:

2. Schritt : Verbinde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ geradlinig mit $\vec{0}$ durch $\gamma(\vec{x})$ und setze $G(\vec{x}) = \int_{\gamma(\vec{x})} \langle F, d\vec{r} \rangle$.

Alternative: "Sukzessive Integration"

9. Integraltransformationen

9.1. Fourierreihen in reeller Notation: Übersicht

1. Einordnender Vergleich mit Taylorreihen

"Bekannt" (4.4.):

Taylorreihen

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ werde durch die zugehörige Taylorreihe ($x_0=0$) dargestellt.

Dann erhält man eine Beschreibung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

d.h. "Bausteine" sind die Funktionen

$$f_k(x) = x^k.$$

Es gibt eine Berechnungsformel für a_k :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Approximationen für $f(x)$ liefern die Partialsummen:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Beispiel:

$$f(x) = \exp(x)$$

"Exponentialfunktion"

"Neu":

Fourierreihen

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch, auf $[0, 2\pi[$ beschrieben und werde außerhalb eventueller Unstetigkeitsstellen durch die zugehörige Fourierreihe dargestellt.

Dann erhält man dort eine Beschreibung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

d.h. "Bausteine" sind die 2π -periodischen Funktionen

$$g_k(x) = \cos(kx), \quad h_k(x) = \sin(kx).$$

Es gibt Berechnungsformeln für a_k und b_k :

"Eulerformeln", s.u.

Approximationen für $f(x)$ außerhalb der Unstetigkeitsstellen liefern die Partialsummen:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx).$$

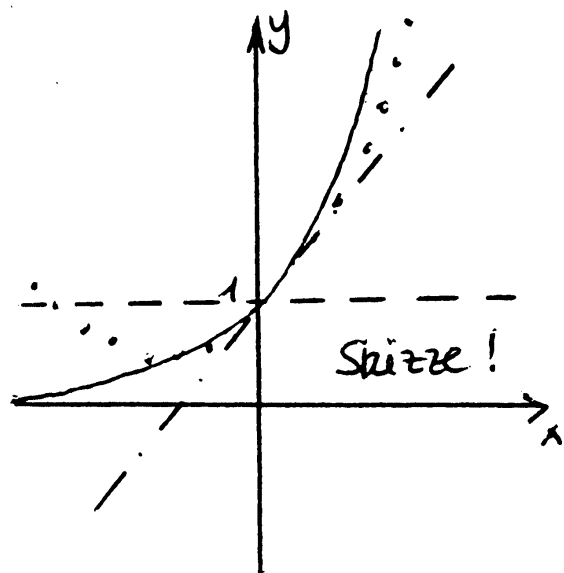
Beispiel:

f 2π -periodisch,

$$f(x) = 1 \text{ für } 0 \leq x \leq \pi,$$

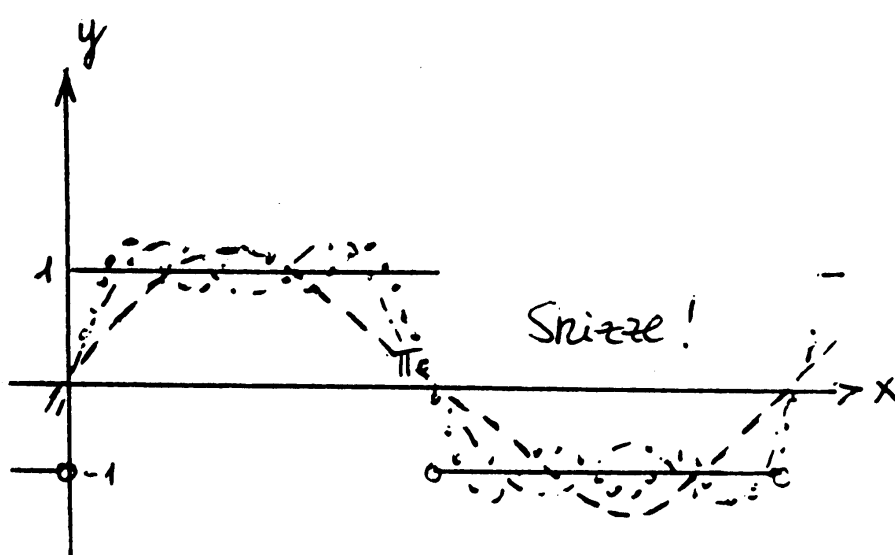
$$f(x) = -1 \text{ für } \pi < x < 2\pi.$$

"Rechteckimpuls"



$$- f(x) \quad \cdots - S_1(x)$$

$$-- S_0(x) \quad \cdots S_2(x)$$



$$- f(x)$$

$$\cdots - S_3(x) = S_4(x)$$

$$-- S_1(x) = S_2(x) \quad \cdots S_5(x) = S_6(x)$$

2. Fourierreihe und Fourierkoeffizienten 2π -periodische Funktionen.

a. Voraussetzungen: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch, auf $[0, 2\pi[$ beschrieben und dort stetig differenzierbar bis auf höchstens endlich viele Ausnahmepunkte. In jedem Ausnahmepunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte:

$$1. \text{ Es existiere } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0^-), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0^+).$$

$$2. \text{ Es existiere } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}.$$

b. Berechnung:

$$\text{Sei } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (k \geq 1);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (k \geq 1).$$

Name:

Euler-

Formeln

Dann ist $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$

die Fourierreihe von f ; $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ sind die Fourierkoeffizienten von f .

Vorsicht! Einige Autoren bezeichnen das mit $\frac{a_0}{2}$, was wir a_0 nennen!

3. Konvergenz der Fourierreihe, Vergleich von Fourierreihe und Funktion

f erfülle die Voraussetzungen aus 2a.; $s(x)$ sei die Fourierreihe von f . Dann gelten:

- $s(x)$ ist stets konvergent.
- $s(x) = f(x)$, falls x kein Ausnahmepunkt ist.
- $s(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$ für jeden Ausnahmepunkt x_0 .

Insbesondere: $s(x_0) = f(x_0)$, falls f in x_0 stetig ist.

4. Fourierkoeffizienten gerader und ungerader Funktionen

f erfülle die Voraussetzungen aus 2a., dann gelten:

a. Ist f ungerade, d.h. gilt $f(-x) = -f(x) \quad (*)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Anschauung: Graph von f ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt), so erhält man:

1. $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$;

2. $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$ für alle $k \geq 1$.

Es genügt, $(*)$ für Nicht-Ausnahmepunkte zu wissen.

b. Ist f gerade, d.h. gilt $f(-x) = f(x) \quad \boxtimes$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Anschauung: Graph von f ist achsensymmetrisch zur y -Achse), so erhält man:

$$1. b_k = 0 \text{ für alle } k \geq 1;$$

$$2. a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \text{ für alle } k \geq 1.$$

Es genügt, ~~☒~~ für Nicht-Ausnahmepunkte zu wissen.

5. Fourierreihe und Fourierkoeffizienten für T-periodische Funktionen

Für T-periodische Funktionen ergeben sich unter 2.-4. die folgenden Änderungen:

- bei 2.a.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei T-periodisch ($T > 0$), auf $[0, T[$ beschrieben...

- bei 2.b.: Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\omega k x) dx \text{ für } k \geq 1;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega k x) dx \text{ für } k \geq 1.$$

Name:

Euler-

Formeln

Dann ist $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega k x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega k x)$ die

Fourierreihe von f , $\dots, T/2$

- bei 4.a.2.: $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(\omega k x) dx$ für alle $k \geq 1$.

- bei 4.b.2.: $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx;$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(\omega k x) dx \text{ für alle } k \geq 1.$$

9.2. Fourierreihen in komplexer Notation: Übersicht

1. Notation der Fourierreihe in komplexer Form

Setzt man in der Situation aus 9.1.5.

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{für } k=1,2,3,\dots; \\ a_0 & \text{für } k=0; \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & \text{für } k=-1,-2,-3,\dots; \end{cases}$$

so erhält man die Fourierreihe von f in komplexer Form durch ∞

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \exp(i\omega_k x).$$

$\dots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sind die komplexen Fourierkoeffizienten von f:

2. Direkte Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten

In der Situation aus 9.1.5. gilt

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \exp(i\omega_k x)$$

mit $\alpha_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \exp(-i\omega_k x) dx$ für $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.

3. Berechnung der reellen Fourierkoeffizienten aus den komplexen.

Sind in der Situation aus 9.1.5. $(\alpha_k)_{k=\dots, -1, 0, 1, \dots}$ die komplexen Fourierkoeffizienten von f, so erhält

man die reellen Fourierkoeffizienten wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0; \\ a_k &= \alpha_k + \alpha_{-k}; \\ b_k &= i(\alpha_k - \alpha_{-k}). \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

9.3. Fourierintegrale und Fouriertransformation: Übersicht.

1. Einordnung: Fourierreihe / Fourierintegral

- Fourierreihen helfen, T-periodische Funktionen aus Cosinus- und Sinusschwingungen der Form $\cos(\omega_k x)$, $\sin(\omega_k x)$ mit $\omega_k = \frac{2\pi}{T} \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, durch Summation über k aufzubauen.
- Fourierintegrale helfen, nicht notwendig periodische Funktionen aus Cosinus- und Sinusschwingungen der Form $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \geq 0$, durch Integration über ω aufzubauen.
- Ein Grenzübergang führt von Fourierreihen zu Fourierintegralen: die gegebene Funktion f wird zunächst auf $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ eingeschränkt und durch f_T T-periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt. f_T hat dann eine Fourierreihe gemäß 9.1.5. Grenzwertbildung für $T \rightarrow \infty$ liefert dann unter geeigneten Voraussetzungen das Fourierintegral von f .

2. Das Fourierintegral

- a. Voraussetzungen: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf jedem abgeschlossenen Intervall stetig differenzierbar bis auf höchstens endlich viele Ausnahmepunkte. In jedem Ausnahmepunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gelten die Bedingungen 1. und 2. aus 9.2.a. Ferner konvergiere das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy$ (vgl. 5.5.2.)
- b. Berechnung: Das Fourierintegral von f lautet
- $$I(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega x) + b(\omega) \sin(\omega x)) d\omega$$
- mit
- $$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(\omega y) dy ;$$
- $$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin(\omega y) dy \quad \text{für } \omega \geq 0.$$
- c. Konvergenz: $I(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.
- d. Vergleich von $I(x)$ und $f(x)$: Falls x kein Ausnahmepunkt ist, gilt $I(x) = f(x)$.
Ist x_0 ein Ausnahmepunkt, so gilt $I(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$. Insbesondere ist $I(x_0) = f(x_0)$, falls f in x_0 stetig ist.

3. Fourierintegrale gerader und ungerader Funktionen

Unter den Voraussetzungen von 9.3.2. gilt:

- a. Ist f ungerade, so erhält man:
1. $a(\omega) = 0$ für alle $\omega \geq 0$;
 2. $b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(y) \sin(\omega y) dy$ für alle $\omega \geq 0$.
- b. Ist f gerade, so erhält man:
1. $a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(y) \cos(\omega y) dy$ für alle $\omega \geq 0$;
 2. $b(\omega) = 0$ für alle $\omega \geq 0$.

4. Fourierintegrale in komplexer Form

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen aus 9.3.2.

a. Setzt man in der Situation aus 9.3.2.

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} \frac{a(\omega) - i \cdot b(\omega)}{2} & \text{für } \omega \geq 0 \\ \frac{a(-\omega) + i \cdot b(-\omega)}{2} & \text{für } \omega < 0, \end{cases}$$

so erhält man das Fourierintegral von f in komplexer Form:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \exp(i\omega x) d\omega.$$

b. $\alpha(\omega)$ läßt sich auch direkt berechnen durch

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-i\omega y) dy.$$

c. Aus $\alpha(\omega)$ erhält man $a(\omega)$ und $b(\omega)$ durch

$$\left. \begin{aligned} a(\omega) &= \alpha(\omega) + \alpha(-\omega); \\ b(\omega) &= i(\alpha(\omega) - \alpha(-\omega)) \end{aligned} \right\} \text{ für } \omega \geq 0.$$

5. Die Spektralfunktion oder Fouriertransformierte

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen aus 9.3.2.

a. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-i\omega y) dy$$

heißt die Spektralfunktion oder Fouriertransformierte von f . Bezeichnung: $\alpha = \mathcal{F}(f)$. (*)

b. $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \exp(i\omega x) d\omega$$

heißt auch die inverse Fouriertransformierte von α . Bezeichnung: $I = \mathcal{F}^{-1}(\alpha)$.

c. Es gilt $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = I(x) = f(x)$, falls f in x stetig ist. "Schlampige" Kommunikation, die Sprungstellen ignoriert: $\mathcal{F}^{-1}(\alpha) = f$.

(*) Notation in der Literatur nicht einheitlich. Man findet auch:

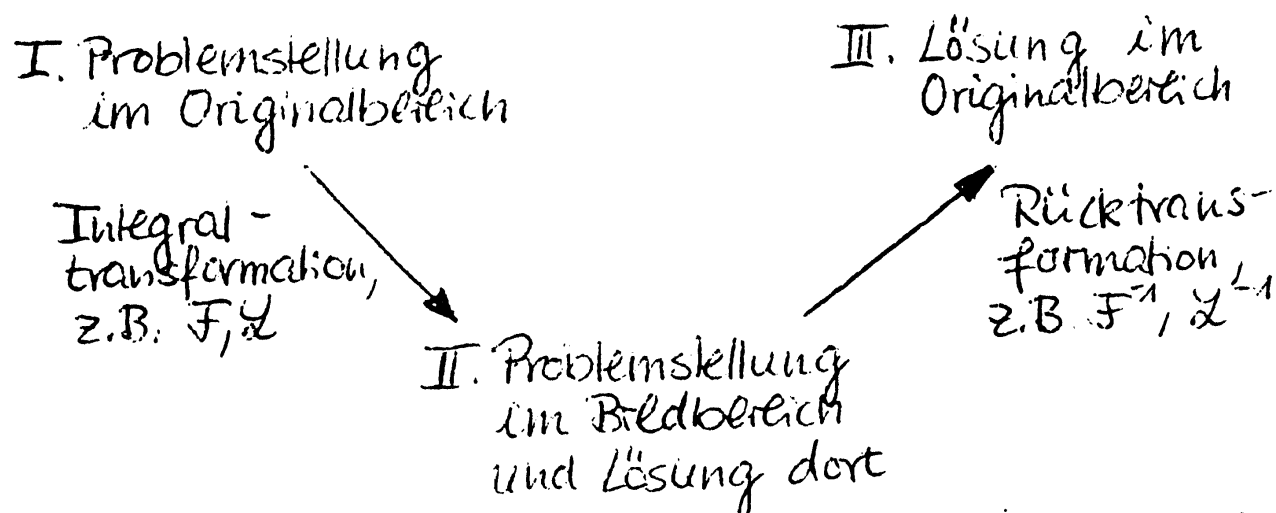
$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(i\omega y) dy \quad (= \sqrt{2\pi} \alpha(-\omega))$$

9.4. Laplace transformationen: Übersicht

1. Einordnung: Laplace transformationen und ihr Nutzen

Laplace transformationen gehören wie die Fourier transformationen zu den Integraltransformationen; die Definition ist "ähnlich" (vgl. 2.)

Integraltransformationen erlauben oft eine vorteilhafte, schnelle Lösung mathematischer Aufgaben nach folgendem Schema:



Mit Hilfe von Laplace transformationen lassen sich viele Anfangswertprobleme bei linearen Differentialgleichungen (vgl. 7.3./ 7.4.) lösen, ohne vorab die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu bestimmen (die Anfangsbedingungen werden "eingearbeitet"). Vgl. dazu 8.

2. Die Laplacetransformierte

$f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Setzt man

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-sx) dx$$

– und zwar für solche s , für die das uneigentliche Integral konvergiert (vgl. 5.5.1.) – so erhält man die Laplace transformierte F von f .

Bezeichnung: $F = \mathcal{L}(f)$.

Die inverse Laplacetransformierte $\mathcal{L}^{-1}(F)$ von F genügt der Beziehung $\mathcal{L}^{-1}(F)(x) = f(x)$, falls f in x stetig ist. "Schlampige" Kurznotation, die Sprungstellen ignoriert: $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$.

3. Tabelle wichtiger Laplacetransformationen

$f(x) =$	$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) =$
1	$\frac{1}{s}$
x	$\frac{1}{s^2}$
$x^n \ (n=0,1,2,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\exp(ax)$	$\frac{1}{s-a}$
$x^n \cdot \exp(ax) \ (n=0,1,2,\dots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\cos(\omega x)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega x) \cdot \exp(ax)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega x) \cdot \exp(ax)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$\cosh(ax)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a; \\ 1 & \text{für } x \geq a, \end{cases}$	$\frac{\exp(-as)}{s}$

4. Der Linearitätssatz

$$\left. \begin{array}{l} \text{a. } \mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \\ \text{b. } \mathcal{L}(c \cdot f) = c \cdot \mathcal{L}(f) \end{array} \right\} \begin{array}{l} f, g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}; \\ c \in \mathbb{R} \end{array}$$

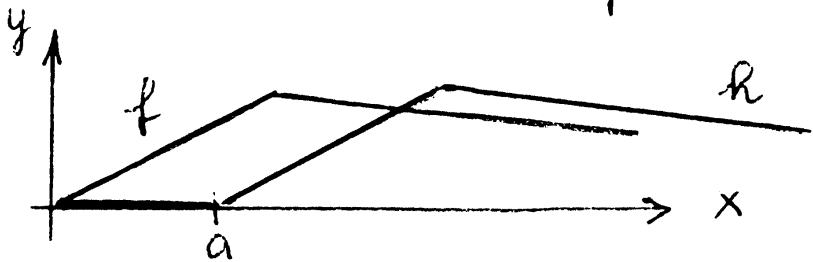
! Das Resultat wird im Zusammenhang mit Differentialgleichungen wichtig!

5. Verschiebungssätze

$$\text{a. } \mathcal{L}(f)(s) = F(s) \text{ und } g(x) = \exp(a \cdot x) \cdot f(x) \Rightarrow \mathcal{L}(g)(s) = F(s-a)$$

$$\text{b. } \mathcal{L}(f)(s) = F(s) \text{ und } h(x) = u_a(x) \cdot f(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a; \\ f(x-a) & \text{für } x \geq a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(h)(s) = F(s) \cdot \exp(-as)$$



6. Laplace transformierte und Ableitung

$$\text{a. } \mathcal{L}(f)(s) = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}(f')(s) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\text{b. } \mathcal{L}(f)(s) = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}(f'')(s) = s^2 \cdot F(s) - s f(0) - f'(0)$$

Allgemein:

$$\text{c. } \mathcal{L}(f)(s) = F(s) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0)$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

! Das Resultat wird im Zusammenhang mit Differentialgleichungen wichtig!

7. Laplacetransformierte und Integration

a. $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ und $h(x) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow$

$$\mathcal{L}(h)(s) = \frac{1}{s} F(s).$$

Allgemein:

b. $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, $\mathcal{L}(g)(s) = G(s)$ und

$$h(x) = \int_0^x g(x-t) f(t) dt = (g * f)(t) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(h)(s) = G(s) \cdot F(s)$$

Name von $g * f$: Faltung von g und f

Name des Resultats: Faltungssatz

Die Regeln helfen bei der Bestimmung inverser Laplacetransformierter!

8. Strategie zum Lösen von Anfangswertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen mit Hilfe von Laplacetransformationen

I. Gegeben ist eine Anfangswertaufgabe bei linearen Differentialgleichungen, deren Lösung y gesucht ist.

II. Anwendung von \mathcal{L} auf die Differentialgleichung, der Linearitätssatz (vgl. 4) und der Ableitungssatz (vgl. 6) liefern zusammen mit den Anfangsbedingungen $\mathcal{L}(y) = Y$.

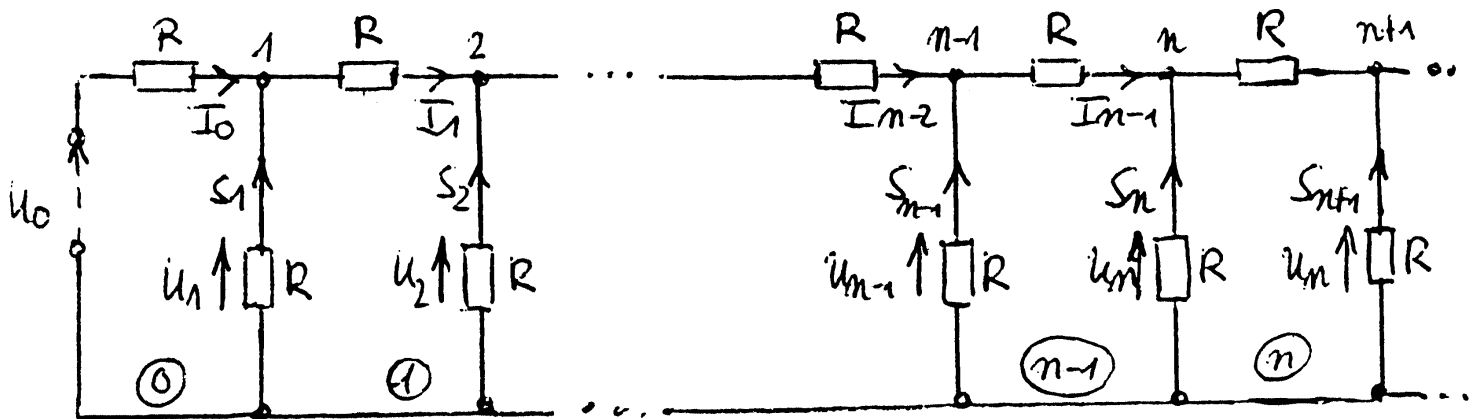
III. Dann ist $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

9.5. \mathcal{Z} -Transformationen: Übersicht in Kurzform

1. Einordnung: \mathcal{Z} -Transformationen und ihr Nutzen

Laplace-Transformationen helfen beim Lösen linearer Differentialgleichungen; \mathcal{Z} -Transformationen helfen beim Lösen linearer Differenzengleichungen und sind somit von der Anwendungsseite her gesehen ein "diskretes Analogon" zu Laplace-Transformationen.

Differenzengleichungen treten z.B. im Zusammenhang mit Netzwerken auf:



Bei dem obigen unendlichen Netzwerk aus Vierpolen ist u_0 gegeben; ferner gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Gesucht ist u_n für alle $n \in \mathbb{N}$. (Lösung: Aufgabe 2)

2. Die \mathcal{Z} -Transformation

$(f_n)_{n=0,1,2,\dots}$ sei eine Folge. Setzt man

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

- und zwar für solche z , für die die obige Reihe konvergiert (vgl. 3.2.1) -, so erhält man die \mathcal{Z} -Transformierte F^* von (f_n) .

Bezeichnung: $F^* = \mathcal{Z}(f_n)$.

(f_n) wird dann als inverse \mathcal{Z} -Transformierte von F^* bezeichnet; Kurznotation: $(f_n) = \mathcal{Z}^{-1}(F^*)$.

3. Tabelle wichtiger \mathcal{Z} -Transformationen

$f_n =$	$\mathcal{Z}(f_n)(z) =$
$\begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	1
1	$\frac{z}{z-1}$
$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\exp(a \cdot n)$	$\frac{z}{z - \exp(a)}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
a^{n-1}	$\frac{1}{z-a}$
a^{n+1}	$\frac{z \cdot a}{z-a}$
$a^n \cdot \sin(\omega n)$	$\frac{a \cdot z \cdot \sin(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$
$a^n \cdot \cos(\omega n)$	$\frac{z(z - a \cdot \cos(\omega))}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$
$a^n \cdot \sinh(\omega n)$	$\frac{a \cdot z \cdot \sinh(\omega)}{z^2 - 2az \cosh(\omega) + a^2}$
$a^n \cdot \cosh(\omega n)$	$\frac{z(z - a \cdot \cosh(\omega))}{z^2 - 2az \cosh(\omega) + a^2}$
$\frac{a^n}{n!}$	$\exp\left(\frac{a}{z}\right)$

4. Der Linearitätssatz

Für Folgen (f_n) und (g_n) und eine Konstante c gelten:

- $\mathcal{Z}(f_n + g_n) = \mathcal{Z}(f_n) + \mathcal{Z}(g_n)$
- $\mathcal{Z}(c \cdot f_n) = c \cdot \mathcal{Z}(f_n)$

5. Der Verschiebungssatz

Für eine Folge (f_n) gelten:

- $\mathcal{Z}(f_{n+1})(z) = z \cdot \mathcal{Z}(f_n)(z) - f_0 z$
- $\mathcal{Z}(f_{n+2})(z) = z^2 \cdot \mathcal{Z}(f_n)(z) - f_0 z^2 - f_1 z$
- Allgemein gilt für eine natürliche Zahl k :

$$\mathcal{Z}(f_{n+k})(z) = z^k \cdot \mathcal{Z}(f_n)(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{k-i}$$

6. Lineare Differenzengleichungen k. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- sind von der Form

$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n$,
 wobei Konstanten a_{k-1}, \dots, a_0 und die Folge (f_n) gegeben sind und die Folge (y_n) gesucht ist.

7. Lösen von linearen Differenzengleichungen wie in 6. mit Hilfe von \mathcal{Z} -Transformationen

- Gegeben ist eine lineare Differenzengleichung k . Ordnung wie in 6., deren Lösung (y_n) gesucht ist.
- Anwenden von \mathcal{Z} auf die Differenzengleichung,

Linearitätssatz (vgl. 4) und Verschiebungssatz (vgl. 5) liefern $F^* = f(y_n)$ in Abhängigkeit von y_0, \dots, y_{k-1} .

III. Dann ist $(y_n) = f^{-1}(F^*)$ - wieder in Abhängigkeit von y_0, \dots, y_{k-1} .

10. Numerische Mathematik.

10.1. Allgemeines über Fehler: Übersicht

1. Fehler, absoluter Fehler, absoluter Höchstfehler

Ist \tilde{x} ein Näherungswert für eine Größe x , so heißen

$$\Delta x = x - \tilde{x} \quad \text{der Fehler von } \tilde{x},$$

$$|\Delta x| = |x - \tilde{x}| \quad \text{der absolute Fehler von } \tilde{x}.$$

Jedes $\alpha_x > 0$ mit $|\Delta x| \leq \alpha_x$ heißt ein absoluter Höchstfehler von \tilde{x} .

2. Relativer Fehler, absoluter relativer Fehler, absoluter relativer Höchstfehler

Ist \tilde{x} ein Näherungswert für eine Größe $x \neq 0$, so heißen

$$\frac{\Delta x}{x} \quad \text{der relative Fehler von } \tilde{x},$$

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| \quad \text{der absolute relative Fehler von } \tilde{x}.$$

Jedes $\beta_x > 0$ mit $\left| \frac{\Delta x}{x} \right| \leq \beta_x$ heißt ein absoluter relativer Höchstfehler von \tilde{x} .

3. Fehlerfortpflanzung bei Summen- und Produktbildung

$$(1) (a) \quad \Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$$

$$(b) \quad \frac{\Delta(x+y)}{x+y} = \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{x}{x+y} + \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{y}{x+y}$$

Faktoren können für ein Anwachsen oder eine Dämpfung des relativen Fehlers verantwortlich sein.

$$(7) (a) \quad \Delta(x \cdot y) = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y - \Delta x \cdot \Delta y$$

kann für "kleine" $\Delta x, \Delta y$ vernachlässigt werden

$$(b) \quad \frac{\Delta(x \cdot y)}{x \cdot y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

kann für "kleine" $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$ vernachlässigt werden

4. Die allgemeine Fehlerformel

(vgl. auch 6.3.4., Stichwort "totales Differential")

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so gilt:

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \cdot \Delta x_i$$

10.2. Näherungsweise Nullstellenbestimmung: Übersicht.

1. Das Newtonverfahren

- dient der näherungsweise Nullstellenbestimmung bei differenzierbaren Funktionen
- beruht auf der folgenden Idee:

II./VIII. ist eine Sicherung gegen Endlosschleifen bei Divergenz. Beachten Sie: Das Newtonverfahren kann divergieren!

3. Ein hinreichendes Konvergenzkriterium für das Newtonverfahren

I sei ein abgeschlossenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar.

Für $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ gelte:

- $g(x) \in I$ für alle $x \in I$;
- $\lambda = \max_{x \in I} \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$.

Dann konvergiert das Newtonverfahren für jeden Startwert $a \in I$.

4. Das allgemeine Iterationsverfahren

- ersetzt die Iterationsfunktion aus dem Newtonverfahren durch eine eventuell anders definierte Funktion g , die ebenfalls

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$$

erfüllt.

- Voraussetzungen: I sei ein abgeschlossenes Intervall, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar mit
 - $g(x) \in I$ für alle $x \in I$;
 - $\lambda = \max_{x \in I} |g'(x)| < 1$.

↖ Kontraktionszahl

- Iterationsvorschrift und Konvergenz:

a. Es gibt genau ein $\bar{x} \in I$ mit $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

b. Ist $x_0 \in I$ beliebig und $x_{n+1} = g(x_n)$, so gilt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

- Fehlerabschätzungen:

a. "Aposteriori": $|x_i - \bar{x}| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} |x_i - x_{i-1}|$

b. "Apriori": $|x_i - \bar{x}| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$.

10.3. Näherungsweise Lösung linearer Gleichungssysteme durch Iterationsverfahren: Übersicht

1. Das Gesamtschrittverfahren (Verfahren von Gauß-Jacobi)

- bestimmt eine näherungsweise Lösung \vec{y} eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $\vec{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $\det(A) \neq 0$ (das System ist also eindeutig lösbar - vgl. 1.5.7.), $a_{ii} \neq 0$ für alle $i=1, \dots, n$.
- arbeitet nach folgendem Algorithmus:
 - I. Wähle eine Schranke $\varepsilon > 0$ für das Endekriterium.
 - II. Wähle eine maximale Anzahl m von Verfahrensschritten.
 - III. Wähle einen Startvektor $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ (oft $\vec{0}$).
 - IV. Setze die Schrittzahl $z := 1$.
 - V. Berechne $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$ mit $d_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} c_j)$ für $i=1, \dots, n$.
 - VI. Falls $\max_{i=1, \dots, n} |c_i - d_i| < \varepsilon$: $\vec{y} = \vec{d}$ ausgeben und Ende.
 - VII. Falls $z = m$: Meldung "kein Resultat nach m Schritten" und Abbruch.
 - VIII. Sonst: $z := z + 1$; $\vec{c} := \vec{d}$ und weiter bei V.

Auch das Gesamtschrittverfahren kann divergieren!

2. Ein hinreichendes Konvergenzkriterium für das Gesamtschrittverfahren und Fehlerabschätzung

- Voraussetzungen: Vorgelegt sei $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ wie in 1.
- Für die Kontraktionszahl $\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$ gelte:
 - $\lambda < 1$,
 - (Sprechweise: Es gilt das starke Zeilensummenkriterium)

- Konvergenz: Dann konvergiert das Gesamtschrittverfahren für jeden Startwert $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
- Fehlerabschätzungen: Ist $\vec{x}^{(z)}$ die in Schritt z erzielte Näherung für \vec{x} , so erhält man:
 - "Aposteriori":

$$\max_{i=1, \dots, n} |x_i^{(z)} - x_i| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \max_{i=1, \dots, n} |x_i^{(z)} - x_i^{(z-1)}|$$
 - "Apriori":

$$\max_{i=1, \dots, n} |x_i^{(z)} - x_i| \leq \frac{\lambda^z}{1-\lambda} \max_{i=1, \dots, n} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|$$

3. Das Einzelschrittverfahren (Verfahren von Gauß-Seidel)

- bestimmt unter den Voraussetzungen wie in 1. eine näherungsweise Lösung \vec{y} von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.
- ähnelt dem Gesamtschrittverfahren, verwendet aber bereits berechnete Koordinaten der neuen Näherung, wo immer dies möglich ist.
- Der Algorithmus aus 1. wird in Punkt IV. abgeändert zu:

IV. Berechne $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$ mit

$$d_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} d_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} c_j \right)$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
 $= 0, \text{ falls Summen nicht definiert!}$

4. Konvergenzkriterium und Fehlerabschätzung für das Einzelschrittverfahren

- Voraussetzungen: Vorgelegt sei $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ wie in 1. es gelte das starke Zeilensummenkriterium aus 2.
- Konvergenz: Dann konvergiert auch das Einzelschrittverfahren für jeden Startwert $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

- Fehlerabschätzungen:

Die Kontraktionszahl ist $\mu = \max_{i=1, \dots, m} \frac{\beta_i}{1 - \alpha_i}$ mit

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \quad \beta_i = \sum_{j=i+1}^m \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

\uparrow
 $= 0$, falls Summen undefiniert!

Ist $\vec{x}^{(z)}$ die in Schritt z erzielte Näherung für \vec{x} ,
 so erhält man:

a. "Aposteriori":

$$\max_{i=1, \dots, m} |x_i^{(z)} - x_i| \leq \frac{\mu}{1 - \mu} \max_{i=1, \dots, m} |x_i^{(z)} - x_i^{(z-1)}|$$

b. "Apriori":

$$\max_{i=1, \dots, m} |x_i^{(z)} - x_i| \leq \frac{\mu^z}{1 - \mu} \max_{i=1, \dots, m} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|$$

10.4. Interpolation: Übersicht.

1. Die Interpolationsaufgabe

- lautet: Gegeben sind $n+1$ Punkte $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ und $y_i \neq 0$ für mindestens i . Gesucht ist ein Polynom p vom Grad $\leq n$ mit $p(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \dots, n$.
- ist stets eindeutig lösbar. Die Lösung p nennt man Interpolationspolynom; $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ sind die zugehörigen Stützstellen.

2. Die Berechnung des Interpolationspolynoms p nach Lagrange

- erfolgt ausgehend von der Situation aus 1. in zwei Schritten:

1. Schritt: Man bestimmt für jedes $j=0, \dots, n$ das Lagrangesche Grundpolynom

$$L_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}$$

- Es ist $L_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j; \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$

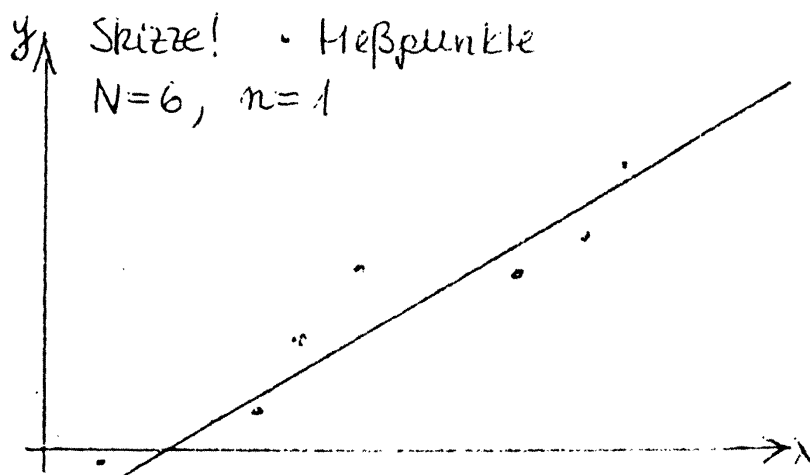
2. Schritt: Dann ist $p(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x)$.

3. Der Interpolationsfehler

- tritt auf, wenn man eine "komplizierte" Funktion f mit Funktionswerten $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$ durch das Interpolationspolynom p wie in 1. ersetzt.
- ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I abgeschlossenes Intervall) $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $x \in I$, so gibt es $\tilde{x} \in I$ mit $f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n) \cdot f^{(n+1)}(\tilde{x})$.
- Diese Formel hat Ähnlichkeit mit der Restgliedformel nach Lagrange. (vgl. 4.4.2.)

10.5. Approximation: Übersicht.

1. Die Approximationsaufgabe



Man ersetze eine "empirisch gegebene" Funktion f , von der $N+1$ Wertepaare $(x_i, f(x_i))$ [$i=0, \dots, N$] bekannt sind, durch ein Polynom p vom Grad $\leq n$ [$n \leq N$ "dem Problem angemessen"]

so daß sich p den Meßwerten "möglichst gut anpaßt" im folgenden Sinne:

p ist so zu wählen, daß

$$|(f(x_0), \dots, f(x_N)) - (p(x_0), \dots, p(x_N))| =$$

$\min \{ |(f(x_0), \dots, f(x_N)) - (q(x_0), \dots, q(x_N))| \mid q \text{ Polynom vom Grad} \leq m \}.$

2. Die Lösung der Approximationsaufgabe

- geht auf Gauß zurück, Namen:
 - Methode der kleinsten Quadrate
 - Fehlerquadratmethode nach Gauß
- ist letztlich die Lösung einer Extremwertaufgabe in $n+1$ Variablen
- lautet: $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$, wobei (c_0, \dots, c_n) die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,0} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} = \sum_{k=0}^N x_k^{i+j}$, $b_i = \sum_{k=0}^N f(x_k) \cdot x_k^i$ ist.

- Die Gleichungen dieses Systems heißen Normalgleichungen.

3. Lineare Regression

- kann man unter numerischen und statistischen Aspekten betreiben.
- behandelt das Problem aus 1. für den Fall $n=1$.
- liefert als Lösung der Approximationsaufgabe die Regressionsgerade

- ist $y_i = f(x_i)$ für $i=0, \dots, N$, $\bar{x} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x_k$,
 $\bar{y} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N y_k$, so lautet diese

$$p(x) = c_1(x - \bar{x}) + \bar{y},$$

$$\text{wobei } c_1 = \frac{\left(\sum_{k=0}^N y_k x_k\right) - (N+1)\bar{x}\bar{y}}{\left(\sum_{k=0}^N x_k^2\right) - (N+1)\bar{x}^2}.$$

Name von c_1 : Regressionskoeffizient.

4. Der Korrelationskoeffizient

- ist in der Situation aus 3. ein Maß dafür, ob $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$ auf einer Geraden liegen.
- ist der Cosinus des Öffnungswinkels zwischen $\vec{x} = (x_0 - \bar{x}, \dots, x_N - \bar{x})$ und $\vec{y} = (y_0 - \bar{y}, \dots, y_N - \bar{y})$
- berechnet sich wie folgt:

$$r = \frac{\left(\sum_{k=0}^N y_k x_k\right) - (N+1)\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\left(\sum_{k=0}^N x_k^2\right) - (N+1)\bar{x}^2\right) \left(\sum_{k=0}^N y_k^2\right) - (N+1)\bar{y}^2}}$$

- hat die folgenden Eigenschaften:

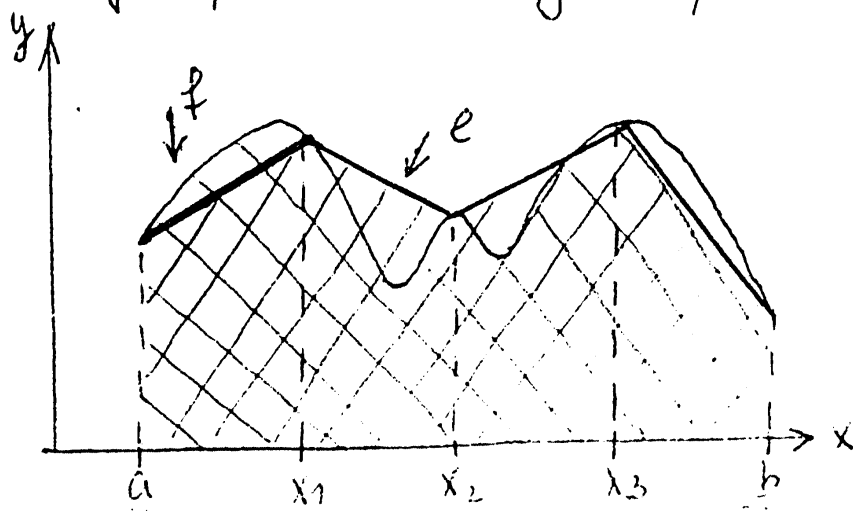
a. $|r| \leq 1$

b. $|r| = 1 \Leftrightarrow (x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$ liegen auf einer Geraden

10.6. Numerische Integration: Übersicht.

1. Die Trapezregel

- berechnet bestimmte Integrale $\int_a^b f(x) dx$, wobei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, näherungsweise



$$n=4 \quad b$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$T(4)$$

- geht von folgender Idee aus (Bild links):
Man unterteilt $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ gleicher Länge. ℓ verbindet die Punkte $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ durch "Streckenstücke". Dann ist $T(n) = \int_a^b \ell(x) dx$.

- lautet formelmäßig:

$$T(n) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$

mit $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i=0, \dots, n$

- konvergiert im folgenden Sinn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = \int_a^b f(x) dx$$

2. Eine Fehlerformel für die Trapezregel

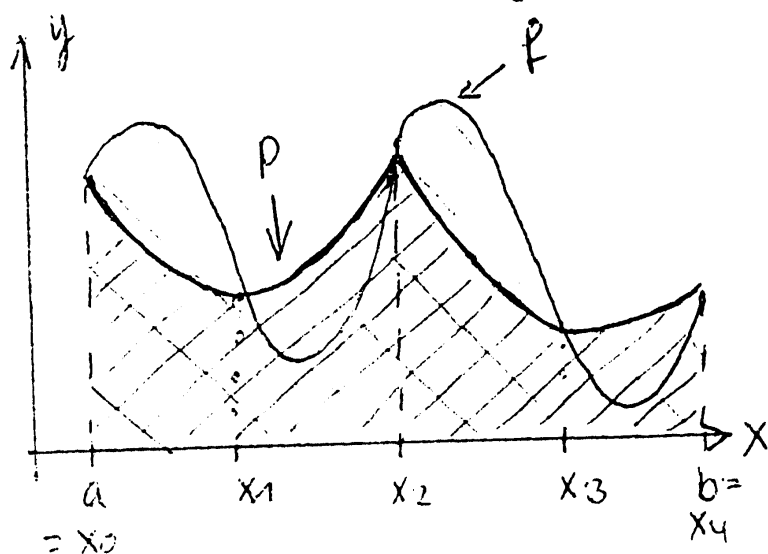
Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = T(n) - \frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\tilde{x})$$

für geeignetes $\tilde{x} \in [a, b]$.

3. Die Simpsonregel

- berechnet ebenfalls bestimmte Integrale $\int_a^b f(x) dx$, wobei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, näherungsweise



$$n=2$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$S(2)$$

1. Teilintervall 2. Teilintervall

- geht von folgender Idee aus (Bild Seite 61) :
Man unterteilt zunächst $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge. In jedem Teilintervall betrachtet man die "Parabel" p , die mit f die Funktionswerte an den Intervallenden und in der Intervallmitte gemeinsam hat. Dann ist $S(n) = \int_a^b p(x) dx$.
- lautet formelmäßig:

$$S(n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2n} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$
 mit $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{2n}$ für $i = 0, \dots, 2n$.
- konvergiert in folgendem Sinn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \int_a^b f(x) dx$$

4. Eine Fehlerformel für die Simpsonregel

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ viermal stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = S(n) - \frac{1}{180} \cdot \frac{(b-a)^5}{(2n)^4} f^{(4)}(\tilde{x})$$

für geeignetes $\tilde{x} \in [a, b]$.

5. Asymptotische Fehlerformeln für Trapez- und Simpsonregel

Unter den Voraussetzungen aus 2. bzw. 4. gelten für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b f(x) dx - T(2n) \approx \frac{1}{3} (T(2n) - T(n))$$

$$\int_a^b f(x) dx - S(2n) \approx \frac{1}{15} (S(2n) - S(n))$$

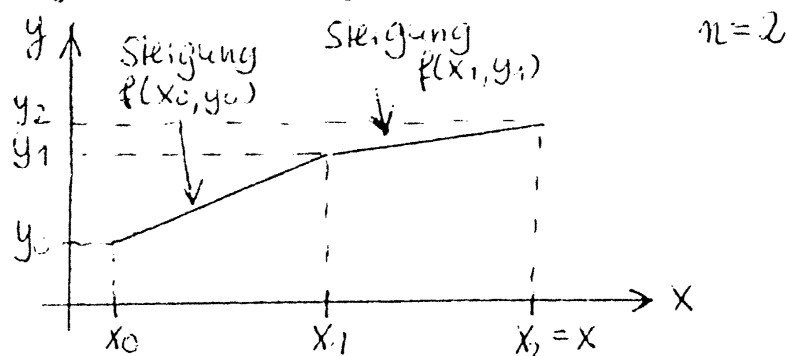
10.7. Numerische Lösung von Anfangswertaufgaben bei Differentialgleichungen: Übersicht

1. Aufgabenstellung in diesem Abschnitt:

- gegeben: Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- gesucht: Näherung für $y(x)$, $x \neq x_0$.

2. Das Eulersche Polygonzugverfahren

- geht von folgender Idee aus:



Man unterteilt $[x_0, x]$ in n Teilintervalle $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n = x]$ gleicher Länge. Durch (x_0, y_0) legt man eine Gerade mit Steigung $f(x_0, y_0)$, deren Funktionswert an der Stelle x_1 ist y_1 . Dann (x_1, y_1) legt man eine Gerade mit Steigung $f(x_1, y_1)$, deren Funktionswert an der Stelle x_2 ist y_2 usw.

Dann ist $y_n(x) = y_n$ ein Näherungswert für $y(x)$.

- löst das Problem aus 1. wie folgt:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $h = \frac{x - x_0}{n}$.

Setze $x_{i+1} = x_i + h$, $y_{i+1} = f(x_i, y_i)h + y_i$ für $i = 0, \dots, n-1$, dann ist $y_n(x) = y_n$ ein Näherungswert für $y(x)$.

- konvergiert für stetiges f in folgendem Sinn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x).$$

3. Eine asymptotische Fehlerformel für das Eulersche Polygonzugverfahren

In der Situation aus 1./2. gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$y(x) - y_{2n}(x) \cong y_{2n}(x) - y_n(x)$$

4. Das Verfahren von Runge und Kutta

- ist eine Verfeinerung von 2., die "besser" konvergiert
- liefert für $y' = f(x)$ die Simpsonregel
- löst das Problem aus 1. wie folgt:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $h = \frac{x - x_0}{n}$.

Setze $x_{i+1} = x_i + h$, $y_{i+1} = \frac{1}{6} (A_i + 2B_i + 2C_i + D_i) + y_i$ für $i=0, \dots, n-1$,

wobei

$$A_i = f(x_i, y_i) \cdot h;$$

$$B_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{A_i}{2}\right) \cdot h;$$

$$C_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{B_i}{2}\right) \cdot h;$$

$$D_i = f(x_i + h, y_i + C_i) \cdot h.$$

Dann ist $y_n(x) = y_n$ ein Näherungswert für $y(x)$.

- konvergiert für stetiges f in folgendem Sinn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x).$$

5. Eine asymptotische Fehlerformel für das Verfahren von Runge und Kutta

trefft in der Situation aus 1./4. für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$y(x) - y_{2n}(x) \approx \frac{1}{15} (y_{4n}(x) - y_{2n}(x))$$

11. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

11.1. Kombinatorik: Übersicht.

1. Stichproben.

- werden im folgenden aus einer n -elementigen Menge, etwa aus $M = \{1, \dots, n\}$, entnommen
- die Anzahl (der Umfang) der entnommenen Stichproben sei k
- man kann Stichproben mit und ohne Zurücklegen (Wiederholung) entnehmen
- dabei kann es auf die Reihenfolge ankommen (geordnet) oder nicht (ungeordnet)
- die Tabelle auf Seite (63a) gibt für jeden denkbaren Fall an:
 1. Eine Beschreibung der Menge der Stichproben vom Umfang k

2. Eine Formel zur Berechnung der Anzahl der Elemente dieser Menge aus n und k .
Beachten Sie dabei gegebenenfalls auch den folgenden Punkt.

2. Binomialkoeffizienten

- sind für $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ und $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$, erklärt
- werden mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet (lies: "n über k")
- werden berechnet nach der Vorschrift $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

11.2. Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume: Übersicht.

1. Ein Ergebnisraum

- ist eine nicht-leere, endliche oder abzählbar-unendliche Menge Ω
- dabei heißt Ω abzählbar-unendlich, falls es eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ gibt, die eine Umkehrfunktion hat (anschaulich bedeutet dies, daß sich die Elemente aus Ω durchnummerieren lassen)

Beispiele:

- $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar-unendlich,
- $\mathbb{R}, [0, 1], \mathbb{C}$ sind nicht abzählbar-unendlich.

2. Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p)

- besteht aus zwei Daten:
 - einem Ergebnisraum Ω ;
 - einer Wahrscheinlichkeitsfunktion $p: \Omega \rightarrow [0, 1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

(Ist Ω abzählbar-unendlich, so ist die letzte Gleichheit im Sinne von Reihen zu verstehen.)

Tabelle zu 11.1.1. : Stichproben.

Sei $M = \{1, \dots, n\}$.

Es gibt Stichproben aus M vom Umfang k des folgenden Typs:

	HIT WIEDERHOLUNG (ZURÜCKLEGEN)	OHNE WIEDERHOLUNG (ZURÜCKLEGEN)	
	$k \in \mathbb{N}$	$k \leq n$	$k = n$
GEORDNET (VARIATION)	Menge: $\{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1, \dots, m_k \in M\}$ Anzahl: $V_W(n, k) = n^k$	Menge: $\{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1, \dots, m_k \in M, m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j\}$ Anzahl: $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	PERMUTATION $V(n, n) = n!$
UNGEORDNET (KOMBINATION)	Menge: $\{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1, \dots, m_k \in M, m_i \leq m_{i+1}\}$ Anzahl: $C_W(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$	Menge: $\{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1, \dots, m_k \in M, m_i < m_{i+1}\}$ Anzahl: $C(n, k) = \binom{n}{k}$	

3. Ereignisse

- sind Teilmengen $E \subseteq \Omega$, wobei (Ω, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.
- haben die Wahrscheinlichkeit

$$p(E) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } E = \emptyset \text{ (leere Menge)} \\ \sum_{\omega \in E} p(\omega) & , \text{ falls } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

- Dabei gelten folgende Rechenregeln:

$$(1) \quad p(\Omega \setminus E) = 1 - p(E) \quad \text{für } E \subseteq \Omega$$

$$(2) \quad p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) \quad \text{für } E_1, E_2 \subseteq \Omega$$

Spezialfall:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) \quad \text{für } E_1, E_2 \subseteq \Omega, E_1 \cap E_2 = \emptyset.$$

$$(3) \quad p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i), \quad \text{falls } E_i \subseteq \Omega, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

$$(4) \quad p(E_1) \leq p(E_2), \quad \text{falls } E_1 \subseteq E_2 \subseteq \Omega.$$

- Einige dieser Rechenregeln finden sich im Axiomensystem von Kolmogorow wieder, das die Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen aufbaut.

4. Bedingte Wahrscheinlichkeit

- wird mit $p(E/F)$ bezeichnet
- ist für $E, F \subseteq \Omega$ mit $p(F) \neq 0$ erklärt, wobei (Ω, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist
- gibt die Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung F an
- berechnet sich durch $p(E/F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$
- Ist $p(E/F) = p(E)$, so heißt E von F unabhängig.
Ist $p(E) \neq 0$, so ist in diesem Fall auch F von E unabhängig.

5. Resultate über bedingte Wahrscheinlichkeiten

Ist (Ω, \mathcal{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{E} = E_1 \cup \dots \cup E_n$,
 $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $p(E_i) \neq 0$, so gelten für $E \subseteq \mathcal{E}$:

$$(1) \quad p(E) = \sum_{i=1}^n p(E_i) \cdot p(E/E_i)$$

Name: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$(2) \quad p(E_k/E) = \frac{p(E_k) p(E/E_k)}{p(E)} = \frac{p(E_k) \cdot p(E/E_k)}{\sum_{i=1}^n p(E_i) p(E/E_i)},$$

falls $p(E) \neq 0$.

Name: Formel von Bayes

11.3. Zufallsvariablen: Übersicht

1. Eine (diskrete) Zufallsvariable X

- ist eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei (Ω, \mathcal{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist

Andere Namen: Zufallsgröße, Zufallsfunktion

- definiert durch die Vorschrift

$$f(k) = p(X=k) = p(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\})$$

eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X .

f wird oft durch ein Stabdiagramm veranschaulicht.

- definiert durch die Vorschrift

$$F(k) = p(X \leq k) = p(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\})$$

eine Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die Verteilungsfunktion von X

F wird oft durch den Graphen veranschaulicht.

- Offenbar ist $F(k) = \sum_{t \leq k} f(t)$

2. Eigenschaften von Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Sind X , f und F wie in 1., so gelten:

(a) (1) $f(k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

(2) $\sum_{k \in \mathbb{R}} f(k) = 1$

- (b) (1) F ist monoton wachsend mit $0 \leq F(k) \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{R}$
- (2) (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 1$ (ii) $\lim_{k \rightarrow -\infty} F(k) = 0$
- (3) $p(k_1 < X \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$ für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 < k_2$.

3. Wichtige diskrete Verteilungen

- sind: Binomialverteilungen,
geometrische Verteilungen,
hypergeometrische Verteilungen,
Poissonverteilungen,
die in einer Tabelle auf Seite (65a) vorgestellt werden.

4. Der Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen Fall

- liefert sogenannte stetige Zufallsvariablen X
- dabei tritt (\mathbb{R}, p) in den Hintergrund und ebenso die eigentliche Definition von X
- wichtig werden eine Variante von f , die dann Dichtefunktion heißt, sowie eine Variante von F , die immer noch Verteilungsfunktion heißt
- die für den Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen Fall typische Regel "Summen werden zu Integralen" ist auch hier zu beachten
- Man erhält so:

5. Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeitsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen X

(a) X hat eine Dichtefunktion f , falls gilt:

- (0) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig bis auf höchstens endlich viele Ausnahmepunkte
- (1) $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$
- (3) $p(X \leq k) = \int_{-\infty}^k f(t) dt$ für alle $k \in \mathbb{R}$

(b) liegt (a) vor, so heißt $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(k) = p(X \leq k)$ Verteilungsfunktion von X . Es gilt:

(1) F ist monoton wachsend mit $0 \leq F(k) \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{R}$

(2) (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 1$

(ii) $\lim_{k \rightarrow -\infty} F(k) = 0$

(3) $p(k_1 < X \leq k_2) = p(k_1 \leq X \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1) = \int_{k_1}^{k_2} f(t) dt$ für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 < k_2$.

6. Standardnormalverteilung und Normalverteilung.

(a) X heißt standardnormalverteilt, falls X die Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

hat.

Der Graph von f ist die Gaußsche Glockenkurve. (siehe Seite (65b) / Zehnmarkschein!)

Die zugehörige Verteilungsfunktion Φ liegt tabelliert vor (vgl. Tabelle auf Seite (65b))

(b) X heißt normalverteilt mit Parametern μ und σ ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$), falls $X = \sigma \cdot X_{st} + \mu$ gilt, wobei X_{st} standardnormalverteilt ist.

X hat dann die Dichtefunktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2/2\right) \cdot \frac{1}{\sigma}$$

7. Approximation einer Binomialverteilung durch eine Normalverteilung.

- ist möglich, falls X_b binomialverteilt ist mit Parametern n und q , die $n \cdot q(1-q) > 9$ erfüllen ("n groß")
- X_b ist dann annähernd normalverteilt mit Parametern $\mu = n \cdot q$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot q \cdot (1-q)}$
- dabei gilt $p(k_1 \leq X_b \leq k_2) \approx p(k_1 - 0,5 \leq \sigma \cdot X_{st} + \mu \leq k_2 + 0,5)$

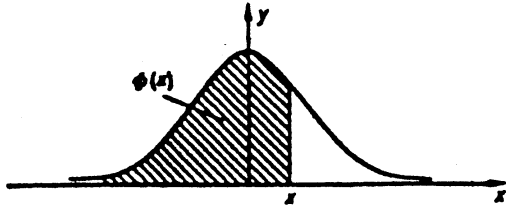
Tabelle zu 11.3.3.: Wichtige diskrete Verteilungen

Stets sei (Ω, \mathcal{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

X heißt..	falls gilt:	Modell:
(a) <u>binomialverteilt mit Parametern n und q</u> ($n \in \mathbb{N}$, $q \in]0, 1[$)	$p(X=k) = \binom{n}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{n-k}$ für $k=0, \dots, n$.	Ein Experiment mit genau 2 sich ausschließenden Resultaten A und B, wobei $p(A)=q$ ($\Rightarrow p(B)=1-q$), wird genau n -mal durchgeführt. $p(X=k)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, daß A genau k -mal eintritt.
(b) <u>geometrisch verteilt mit Parameter q</u> ($q \in]0, 1[$)	$p(X=k) = q \cdot (1-q)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$	Ein Experiment wie in (a) wird so lange durchgeführt, bis A eintritt. $p(X=k)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, daß A im k . Versuch eintritt.
(c) <u>hypergeometrisch verteilt mit Parametern n, τ, τ_1</u> ($n, \tau, \tau_1 \in \mathbb{N}$, $n \leq \tau$, $\tau_1 \leq \tau$)	$p(X=k) = \frac{\binom{\tau_1}{k} \binom{\tau-\tau_1}{n-k}}{\binom{\tau}{n}}$ für $k=0, \dots, n$. (nicht def. Binomialkoeffizienten sind 0 zu setzen)	Es werden n Kugeln aus einer Urne mit τ Kugeln gezogen, von denen τ_1 schwarz sind. $p(X=k)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, genau k schwarze Kugeln zu ziehen.
(d) <u>Poisson-verteilt mit Parameter λ</u> ($\lambda \in]0, \infty[$)	$p(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.	Ein radioaktives Präparat strahlt im Schnitt λ α -Teilchen pro Sekunde ab. $p(X=k)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß genau k α -Teilchen pro Sekunde abgestrahlt werden.

Tabelle zu 11.3.6.: Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$



x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.5000	0.26	0.6026	0.51	0.6950	0.76	0.7764
0.01	0.5040	0.27	0.6064	0.52	0.6985	0.77	0.7794
0.02	0.5080	0.28	0.6103	0.53	0.7019	0.78	0.7823
0.03	0.5120	0.29	0.6141	0.54	0.7054	0.79	0.7853
0.04	0.5160	0.30	0.6179	0.55	0.7088	0.80	0.7881
0.05	0.5199	0.31	0.6217	0.56	0.7123	0.81	0.7910
0.06	0.5239	0.32	0.6255	0.57	0.7157	0.82	0.7939
0.07	0.5279	0.33	0.6293	0.58	0.7190	0.83	0.7967
0.08	0.5319	0.34	0.6331	0.59	0.7224	0.84	0.7995
0.09	0.5359	0.35	0.6368	0.60	0.7257	0.85	0.8023
0.10	0.5398	0.36	0.6406	0.61	0.7291	0.86	0.8051
0.11	0.5438	0.37	0.6443	0.62	0.7324	0.87	0.8078
0.12	0.5478	0.38	0.6480	0.63	0.7357	0.88	0.8106
0.13	0.5517	0.39	0.6517	0.64	0.7389	0.89	0.8133
0.14	0.5557	0.40	0.6554	0.65	0.7422	0.90	0.8159
0.15	0.5596	0.41	0.6591	0.66	0.7454	0.91	0.8186
0.16	0.5636	0.42	0.6628	0.67	0.7486	0.92	0.8212
0.17	0.5675	0.43	0.6664	0.68	0.7517	0.93	0.8238
0.18	0.5714	0.44	0.6700	0.69	0.7549	0.94	0.8264
0.19	0.5753	0.45	0.6736	0.70	0.7580	0.95	0.8289
0.20	0.5793	0.46	0.6772	0.71	0.7611	0.96	0.8315
0.21	0.5832	0.47	0.6808	0.72	0.7642	0.97	0.8340
0.22	0.5871	0.48	0.6844	0.73	0.7673	0.98	0.8365
0.23	0.5910	0.49	0.6879	0.74	0.7703	0.99	0.8389
0.24	0.5948	0.50	0.6915	0.75	0.7734	1.00	0.8413

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1.00	0.8413	1.36	0.9131	1.71	0.9564	2.12	0.9830
1.01	0.8438	1.37	0.9147	1.72	0.9572	2.14	0.9838
1.02	0.8461	1.38	0.9162	1.73	0.9582	2.16	0.9846
1.03	0.8485	1.39	0.9177	1.74	0.9591	2.18	0.9854
1.04	0.8508	1.40	0.9192	1.75	0.9599	2.20	0.9861
1.05	0.8531	1.41	0.9207	1.76	0.9608	2.22	0.9868
1.06	0.8554	1.42	0.9222	1.77	0.9616	2.24	0.9875
1.07	0.8577	1.43	0.9236	1.78	0.9625	2.26	0.9881
1.08	0.8599	1.44	0.9251	1.79	0.9633	2.28	0.9887
1.09	0.8621	1.45	0.9265	1.80	0.9641	2.30	0.9893
1.10	0.8643	1.46	0.9279	1.81	0.9649	2.32	0.9898
1.11	0.8665	1.47	0.9292	1.82	0.9656	2.34	0.9904
1.12	0.8686	1.48	0.9306	1.83	0.9664	2.36	0.9909
1.13	0.8708	1.49	0.9319	1.84	0.9671	2.38	0.9913
1.14	0.8729	1.50	0.9332	1.85	0.9678	2.40	0.9918
1.15	0.8749	1.51	0.9345	1.86	0.9686	2.42	0.9922
1.16	0.8770	1.52	0.9357	1.87	0.9693	2.44	0.9927
1.17	0.8790	1.53	0.9370	1.88	0.9699	2.46	0.9931
1.18	0.8810	1.54	0.9382	1.89	0.9706	2.48	0.9934
1.19	0.8830	1.55	0.9394	1.90	0.9713	2.50	0.9938
1.20	0.8849	1.56	0.9406	1.91	0.9719	2.54	0.9945
1.21	0.8869	1.57	0.9418	1.92	0.9726	2.58	0.9951
1.22	0.8888	1.58	0.9429	1.93	0.9732	2.62	0.9956
1.23	0.8907	1.59	0.9441	1.94	0.9738	2.66	0.9961
1.24	0.8925	1.60	0.9452	1.95	0.9744	2.70	0.9965
1.25	0.8944	1.61	0.9463	1.96	0.9750	2.74	0.9969
1.26	0.8962	1.62	0.9474	1.97	0.9756	2.78	0.9973
1.27	0.8980	1.63	0.9484	1.98	0.9761	2.82	0.9976
1.28	0.8997	1.64	0.9495	1.99	0.9767	2.86	0.9979
1.29	0.9015	1.65	0.9505	2.00	0.9772	2.90	0.9981
1.30	0.9032	1.66	0.9515	2.02	0.9783	2.94	0.9984
1.31	0.9049	1.67	0.9525	2.04	0.9793	3.00	0.9986
1.32	0.9066	1.68	0.9535	2.06	0.9803	3.20	0.9993
1.33	0.9082	1.69	0.9545	2.08	0.9812	3.40	0.9996
1.34	0.9099	1.70	0.9554	2.10	0.9821	3.60	0.9998
1.35	0.9115					3.80	0.9999

11.4. Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung: Übersicht

1. Der Erwartungswert $E(X)$

- ist für eine Zufallsvariable X eine wichtige Kenngröße
- ist eine Verallgemeinerung des Mittelwertes
- ist für eine diskrete Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R}, p) Wahrscheinlichkeitsraum) mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot X(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{R}} k \cdot p(X=k) = \sum_{k \in \mathbb{R}} k \cdot f(k)$$

- Ist \mathbb{R} unendlich, so ist $E(X)$ nur im Falle absoluter Konvergenz der obigen Reihe definiert.
 - ist für eine stetige Zufallsvariable X mit Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch
- $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt.$$
- Dabei wird absolute Konvergenz des uneigentlichen Integrals vorausgesetzt.

2. Ein Hilfssatz zur Berechnung von Erwartungswerten

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und $Y = \varphi(X)$, φ stetig, so gilt

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t) dt$$

3. Rechenregeln für Erwartungswerte

- $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$
 - $E(cX) = c \cdot E(X)$
- } Linearität des Erwartungswertes
- Sind X_1 und X_2 unabhängig, so gilt:
- $$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$$
- Multiplikativität des Erwartungswertes im unabhängigen Fall

(Unabhängigkeit bedeutet etwa im diskreten Fall, daß $E_{1,k_1} = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = k_1\}$ und $E_{2,k_2} = \{\omega \in \Omega \mid X_2(\omega) = k_2\}$ mit $p(E_{1,k_1}) \neq 0$ und $p(E_{2,k_2}) \neq 0$ unabhängig im Sinne von 11.2.4. sind)

4. Erwartungswerte wichtiger Verteilungen

- findet man auf einer Tabelle auf Seite (66a)

5. Varianz und Standardabweichung

- sind für eine Zufallsvariable X weitere wichtige Kenngrößen, die ein Maß für die Abweichung von $\mu = E(X)$ sind
- die Varianz von X ist $V(X) = E((X-\mu)^2)$
 - Bei Berechnungen im kontinuierlichen Fall ist manchmal 2. hilfreich.
- die Standardabweichung oder Streuung von X ist $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

6. Rechenregeln für Varianzen

- a. Ist X eine Zufallsvariable mit $E(X) = \mu$, so gelten:

i. $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ Satz von Steiner

ii. $V(X) = E(X(X-1)) + \mu - \mu^2$

iii. $V(c_1 X + c_2) = c_1^2 V(X)$

- b. Sind X_1 und X_2 Zufallsvariablen, so gelten:

i. $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\sigma_{X_1, X_2}$

wobei $\sigma_{X_1, X_2} = E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)))$ die Kovarianz von X_1 und X_2 ist.

Sind X_1 und X_2 unabhängig, so gilt:

ii. $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$

iii. $V(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1^2 V(X_1) + c_2^2 V(X_2)$.

7. Varianzen wichtiger Verteilungen

- findet man auf einer Tabelle auf Seite (66a)

11.5. Schätzen: Übersicht.

1. Was ist erwartungstreu Schätzen?

Sind Kenngrößen einer Zufallsvariablen X unbekannt, so gibt es, diese mit Hilfe von Stichprobenwerten x_1, \dots, x_n von X zu schätzen. x_1, \dots, x_n kann man als n beobachtete

Tabelle zu 11.4.4. / 7. : Erwartungswerte und Varianzen wichtiger Verteilungen

X sei...	dann ist...	und...
binomialverteilt mit Parameter n und q	$E(X) = n \cdot q$	$V(X) = n \cdot q (1-q)$
geometrisch verteilt mit Parameter q	$E(X) = \frac{1}{q}$	$V(X) = \frac{1-q}{q^2}$
hypergeometrisch verteilt mit Parameter n, r, r_1	$E(X) = n \cdot \frac{r_1}{r}$	$V(X) = n \cdot \frac{r_1}{r} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right) \frac{r-n}{r-1}$
Poisson-verteilt mit Parameter λ	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$
standardnormalverteilt	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
normalverteilt mit Parameter μ und σ	$E(X) = \mu$	$V(X) = \sigma^2$

Daten der einen Zufallsvariablen X auffassen, oft ist es aber günstiger, x_1, \dots, x_n als je einen beobachteten Wert von n unabhängigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n zu betrachten, die dieselbe Verteilungsfunktion wie X besitzen.

Denn: Ein Schätzwert z.B. für $E(X)$ wird sich aus x_1, \dots, x_n ergeben, also eine Funktion $g(x_1, \dots, x_n)$ liefern und damit $g(X_1, \dots, X_n)$. Ist $E(g(X_1, \dots, X_n)) = E(X)$, so ist die Art des Schätzens "gut": Man sagt, daß die Schätzfunktion g erwartungstreu ist. Eine Schätzfunktion h für $V(X)$ sollte analog $E(h(X_1, \dots, X_n)) = V(X)$ erfüllen.

2. Der Mittelwert als erwartungstreuer Schätzwert für den Erwartungswert

a. Sind x_1, \dots, x_n Stichprobenwerte einer Zufallsvariablen X , so heißt $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ der Mittelwert von x_1, \dots, x_n .
Anderer Name: Arithmetisches Mittel.

b. Sind X_1, \dots, X_n unabhängig mit derselben Verteilungsfunktion wie X , so gilt für $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$:

i. $E(\bar{X}) = E(X)$

ii. $V(\bar{X}) = \frac{1}{n} V(X)$

3. Die Stichprobenvarianz als erwartungstreuer Schätzwert für die Varianz

a. Sind x_1, \dots, x_n , $n \geq 2$, Stichprobenwerte einer Zufallsvariablen X mit Mittelwert \bar{x} , so heißt $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

VORSICHT! NICHT n

die Varianz der Stichprobe, $s = \sqrt{s^2}$ ist die Standardabweichung der Stichprobe.

- b. Sind X_1, \dots, X_n $n \geq 2$, unabhängig mit derselben Verteilungsfunktion wie X , so gilt für $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
 $= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$: $E(S^2) = V(X)$.

↑
Stimmt nur mit diesem Nenner! Nicht mit n .

11.6. Konfidenzintervalle: Übersicht.

1. Ein Konfidenzintervall

- erlaubt grob gesprochen eine statistische Fehlerabschätzung!
 Besagt z.B. $|E - \bar{X}| \leq d$ in der Numerik, daß E mit Sicherheit in $[\bar{X} - d, \bar{X} + d]$ liegt, so ist in der Statistik $[E_1, E_2]$ ein Konfidenzintervall zur Konfidenzwahrscheinlichkeit γ , falls E mit der Wahrscheinlichkeit γ in $[E_1, E_2]$ liegt.
- für einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Parameter r zur Konfidenzwahrscheinlichkeit $\gamma \in]0, 1[$ (oder zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1 - \gamma$) ist ein Intervall $[u, v]$ mit $p(u \leq r \leq v) = \gamma$.

2. Konfidenzintervall für den Erwartungswert bei bekannter Streuung.

X sei normalverteilt mit (unbekanntem) Erwartungswert μ und (bekannter) Streuung σ^2 . Gegeben sind Stichprobenwerte x_1, \dots, x_n von X mit Mittelwert \bar{x} .

- a. Sind X_1, \dots, X_n unabhängig mit derselben Verteilungsfunktion wie X , so ist \bar{X} normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, d.h.

$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ist standardnormalverteilt.

Auswertung dieses theoretischen Hintergrundes ergibt: